Analisi Matematica L-A

Anno Accademico 2006/07

Docente prof. Giovanni Dore

DEFINIZIONI E TEOREMI

Riccardo Trevisan

19 gennaio 2007

Sommario

(* richiede dimostrazione)

1. Prodotto cartesiano

Dati due insiemi non necessariamente distinti A e B possiamo considerare un nuovo insieme costituito da tutte le ***coppie ordinate*** (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Esso prende il nome di ***prodotto cartesiano*** di A per B e si indica col simbolo $A \times B$.

2. Intervallo

Dati due numeri reali a, b, si chiama ***intervallo di estremi a e b*** uno dei seguenti insiemi:

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

Un intervallo limitato rappresenta geometricamente un segmento, mentre uno illimitato rappresenta una semiretta.

3. Funzione

Una ***funzione*** può essere definita come una regola che ad un oggetto (esempio un numero) ne fa corrispondere un altro.

Siano A, B insiemi, tali che $f \subseteq A \times B$. Diciamo che f è una funzione da A a B, e scriveremo $f : A \to B$, quando:

a) $\forall a \in A \quad \exists b \in B : (a,b) \in f$;

b) se $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ allora $b = c$.

4. Dominio e codominio di funzioni

Siano A, B insiemi, $f : A \to B$, chiamiamo ***dominio di f*** l'insieme A, ***codominio di f*** l'insieme B.

5. Immagine di una funzione

Data $f : A \to B$, l'insieme $\{f(x) : x \in A\}$ è detto ***immagine di f*** e si indica $\operatorname{Im} f$.

6. Valore assoluto

Sia $x \in \mathbb{R}$, chiamiamo ***valore assoluto di x*** il numero:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il numero $|x|$ rappresenta geometricamente la distanza dal punto x sull'asse reale dall'origine, mentre il numero $|x - y|$ rappresenta la distanza tra x e y, ossia la lunghezza del segmento che li congiunge.

7. Proprietà del valore assoluto (I, II, III *, IV *, V, VI *, VII *)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$:

I) $|x| \geq 0$

II) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

III) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$

IV) $|x| \geq y \Leftrightarrow x \geq y \quad \text{o} \quad x \leq -y$

V) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

VI) $|x + y| \leq |x| + |y|$

VII) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$

8. Massimo e minimo di un insieme

Siano $A \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$, allora diciamo che a è ***massimo di A***, e lo indichiamo $\max A$, quando:

a) $a \in A$

b) $\forall x \in A \quad x \leq a$

Diciamo che a è ***minimo di A***, e lo indichiamo $\min A$, quando:

a) $a \in A$

b) $\forall x \in A \quad x \geq a$

9. Maggiorante e minorante di un insieme

Siano $A \subseteq \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Diciamo che y è un ***maggiorante di A*** (risp. ***minorante di A***) quando $\forall x \in A \quad x \leq y$ (risp. $\forall x \in A \quad x \geq y$).

10. Insieme superiormente e inferiormente limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che A è ***superiormente limitato*** (risp. ***inferiormente limitato***) quando l'insieme dei maggioranti non è vuoto (risp. l'insieme dei minoranti non è vuoto).

11. Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato, chiamiamo ***estremo superiore di A***, e lo indichiamo $\sup A$, il minimo dell'insieme dei maggioranti di A e ***estremo inferiore di A***, e lo indichiamo $\inf A$, il massimo dell'insieme dei minoranti di A.

Proprietà fondamentale che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ è che in $\mathbb{R}$ ogni insieme dei maggioranti (risp. dei minoranti) ha minimo (risp. massimo).

12. Principio d'induzione

Definita $p(n)$ come proposizione in cui compare il numero naturale n, si vuole dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad p(n)$ è vera. Per dimostrare ciò per induzione occorre dimostrare:

a) $p(0)$ è vera;

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

13. Disuguaglianza di Bernoulli *

$\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$

14. Successioni

Sia A un insieme, chiamiamo ***successione a termini in A*** ogni funzione da $\mathbb{N}$ ad A. una successione è indicata con $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dove a_k è il corrispondente a k mediante la funzione, in altre parole: $k \mapsto a_k$. a_k è il k-esimo termine della successione.

15. Significato di "definitivamente"

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ha ***definitivamente*** una certa proprietà quando esiste $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > \overline{k} \quad a_k$ possiede quella certa proprietà.

16. Limite finito di successione

Siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$. Diciamo che $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ha ***limite l per k che tende a +∞*** quando $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ definitivamente $|a_k - l| < \varepsilon$. Perciò si ha: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $k > k_\varepsilon \Rightarrow |a_k - l| < \varepsilon$. In tal caso il limite viene indicato con: $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = l$.

17. Limite infinito di successione

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ha ***limite +∞*** quando $\forall M \in \mathbb{R}$ definitivamente $a_k > M$. Perciò si ha: $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k_M \in \mathbb{N}$: $k > k_M \Rightarrow a_k > M$.

18. Successioni convergenti e divergenti

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$. Se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = l$ diciamo che la successione è ***convergente***. Se $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$ o $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = -\infty$ diciamo che la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è ***divergente***. Se $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ non ha limite, né reale, né $+\infty$, né $-\infty$, allora diciamo che è ***irregolare*** o ***oscillante***.

19. Teorema di unicità del limite

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$. Se esistono $l, m \in \mathbb{R}^*$ entrambi limite di $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ allora $l = m$.

20. Successione limitata

Diciamo che una successione è ***limitata*** quando l'insieme $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

21. Teorema sulle successioni limitate (I, II, III)

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

II) Se $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$ allora $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata e superiormente illimitata.

III) Se $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = -\infty$ allora $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata e inferiormente illimitata.

22. Teorema di permanenza del segno *

Siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{R}$. Se $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k \geq m$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = l$ allora $l \geq m$.

23. Teorema del confronto (I, II, III)

Siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k \leq b_k \leq c_k$.

I) Se $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono convergenti e $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \lim\limits_{k\to+\infty} c_k$ ed è reale, allora $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente e $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = \lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \lim\limits_{k\to+\infty} c_k$.

II) Se $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$ allora $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = +\infty$.

III) Se $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k = -\infty$ allora $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = -\infty$.

24. Teorema del limite della somma di successioni (I *, II, III)

Siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, l, $m \in \mathbb{R}^*$. Supponiamo che esistano $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = l$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = m$.

I) Se l, $m \in \mathbb{R}$ allora $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} (a_k + b_k) = l + m$.

II) Se $l = +\infty$ e $m > -\infty$ allora esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} (a_k + b_k) = +\infty$.

III) Se $l = -\infty$ e $m < +\infty$ allora esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} (a_k + b_k) = -\infty$.

Il teorema non contempla il caso in cui siano $l = +\infty$ e $m = -\infty$ o $l = -\infty$ e $m = +\infty$.

25. Teorema del limite del prodotto di successioni (I *, II, III)

Siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, l, $m \in \mathbb{R}^*$, tali che $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = l$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = m$.

I) Se l, $m \in \mathbb{R}$ allora $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} a_k b_k = \lim\limits_{k\to+\infty} a_k \cdot \lim\limits_{k\to+\infty} b_k$.

II) Se $l \in \{+\infty, -\infty\}$ e $m > 0$ allora esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k b_k = l$.

III) Se $l \in \{+\infty, -\infty\}$ e $m < 0$ allora esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k b_k = -l$.

26. Teorema sull'annullamento del prodotto dei limiti di successioni limitate *

Siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Se $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ e la successione $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata allora $\lim_{k\to+\infty} a_k b_k = 0$.

27. Teorema del limite del quoziente di successioni (I, II, III, IV)

Sia $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}^*$. Supponiamo che $\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k \neq 0$ e sia $\lim_{k\to+\infty}(b_k) = m$.

I) Se $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ allora esiste $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{b_k}\right) = \frac{1}{m}$.

II) Se $m \in \{+\infty, -\infty\}$ allora esiste $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{b_k}\right) = 0$.

III) Se $m = 0$ e $\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k > 0$ allora esiste $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{b_k}\right) = +\infty$.

IV) Se $m = 0$ e $\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k < 0$ allora esiste $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{b_k}\right) = -\infty$.

28. Teorema del limite del valore assoluto di una successione (I *, II)

Siano $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$ tale che $\lim_{k\to+\infty} a_k = l$.

I) Se $l \in \mathbb{R}$ allora esiste $\lim_{k\to+\infty}|a_k| = |l|$.

II) Se $l \in \{+\infty, -\infty\}$ allora esiste $\lim_{k\to+\infty}|a_k| = +\infty$.

29. Successioni crescenti, decrescenti, monotone

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è ***crescente*** (risp. ***strettamente crescente***) quando $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{k+1} \geq a_k$ (risp. $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{k+1} > a_k$). Diciamo che $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è ***decrescente*** (risp. ***strettamente decrescente***) quando $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{k+1} \leq a_k$ (risp. $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{k+1} < a_k$). Diciamo che $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è ***monotona*** quando è crescente o decrescente.

30. Teorema di esistenza del limite per successioni monotone *

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente (risp. decrescente, quindi monotona) allora esiste $\lim_{k\to+\infty} a_k = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ (risp. $\lim_{k\to+\infty} a_k = \inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$).

31. Il numero *e*

Chiamiamo ***e*** il numero $\lim_{k\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

32. Funzione composta

Siano A, B, C insiemi, $f : A \to B$, $g : B \to C$ chiamiamo ***composizione di f con g***, e indichiamo $g \circ f$, la funzione da A a C tale che per $x \in A$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, chiamata ***funzione composta***.

33. Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva

Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è ***iniettiva*** quando $\forall x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Diciamo che f è ***suriettiva su B*** quando $\operatorname{Im} f = B$. Diciamo che f è ***biiettiva*** o ***biunivoca su B*** (o ***da A a B***) quando f è iniettiva e suriettiva su B.

34. Funzione invertibile

Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è ***invertibile*** quando f è iniettiva, in tal caso chiamiamo ***funzione inversa di f*** la funzione $f^{-1} : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Dom} f$ tale che $\forall x \in \operatorname{Dom} f, \forall y \in \operatorname{Im} f$ $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

35. Funzione identica

Sia A un insieme. Chiamiamo ***funzione identica*** o ***identità su A*** la funzione $\operatorname{Id}_A : A \to A$ tale che $\forall x \in A$ $\operatorname{Id}_A(x) = x$.

36. Teoremi sulle funzioni invertibili

Sia $f : A \to B$ invertibile, allora $\operatorname{Dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Im} f^{-1} = \operatorname{Dom} f$. Inoltre f^{-1} è invertibile e $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Sia $f : A \to B$ invertibile, allora $f^{-1} \circ f = \operatorname{Id}_{\operatorname{Dom} f}$ e $f \circ f^{-1} = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} f}$.

37. Limite di funzione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$, $f : I - \{c\} \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$, diciamo che $f(x)$ ha ***limite l per x che tende a c*** quando qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $I - \{c\}$, tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$. In tal caso scriviamo $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

Il limite di funzione può essere anche definito senza ricorrere alle successioni, come segue:

a) $c \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}, \lim_{x\to c} f(x) = l \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : x \in I \cap \left]c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon\right[- \{c\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon;$$

b) $c \in \mathbb{R}, l = +\infty, \lim_{x\to c} f(x) = l \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+ : x \in I \cap \left]c - \delta_M, c + \delta_M\right[- \{c\} \Rightarrow f(x) > M;$$

c) $c = +\infty, l \in \mathbb{R}, \lim_{x\to c} f(x) = l \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbb{R} : x \in I \cap \left]k_\varepsilon, +\infty\right[\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

38. Teorema di permanenza del segno per i limiti di funzioni *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$, $f : I - \{c\} \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{R}$. Se $\forall x \in I - \{c\} \quad f(x) \geq m$ e $\lim_{x \to c} f(x) = l$ allora $l \geq m$.

39. Teorema del limite di funzione composta

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $c \in I \cup \{\sup I, \inf I\}, d \in J \cup \{\sup J, \inf J\}$, $l \in \mathbb{R}^*$, $f : I - \{c\} \to J - \{d\}, g : J - \{d\} \to \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \to c} f(x) = d$ e $\lim_{y \to d} g(y) = l$ allora $\lim_{x \to c} g(f(x)) = l$.

40. Limite destro e limite sinistro di funzione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I - \{\sup I\}$, $f : I - \{c\} \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$. Diciamo che f ha limite l per x che tende a c ***da destra*** quando qualunque sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in I, tale che $\forall n \quad a_n > c$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = c$, si ha $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$. In tal caso scriviamo: $\lim_{x \to c^+} f(x) = l$.

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I - \{\inf I\}$, $f : I - \{c\} \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$. Diciamo che f ha limite l per x che tende a c ***da sinistra*** quando qualunque sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in I, tale che $\forall n \quad a_n < c$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = c$, si ha $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$. In tal caso scriviamo: $\lim_{x \to c^-} f(x) = l$.

41. Funzione ristretta

Siano $f : A \to B$ e $C \subseteq A$. La funzione ***f* ristretta a *C***, che si indica $f|_C$, è la funzione $g : C \to B$ tale che $\forall x \in C \quad g(x) = f(x)$.

42. Teorema sui limiti destro e sinistro di funzione (i, ii)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I - \{\sup I, \inf I\}$, $f : I - \{c\} \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

i) $\exists \lim_{x \to c} f(x)$.

ii) $\exists \lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\exists \lim_{x \to c^+} f(x)$ e sono uguali fra loro.

In tal caso $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$.

43. Funzioni crescenti, decrescenti, monotone

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Data $f : A \to \mathbb{R}$ diciamo che f è ***crescente*** (risp. ***strettamente crescente***) quando $\forall x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (risp. $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$). Diciamo che f è ***decrescente*** (risp. ***strettamente decrescente***) quando $\forall x, y \in A \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (risp. $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$). Diciamo che f è ***monotona*** quando è crescente o decrescente.

44. Teoremi sui limiti di funzioni monotone (I, II, III)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ crescente.

I) Se $c = \sup I$ allora $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I - \{c\}\}$.

II) Se $c = \inf I$ allora $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I - \{c\}\}$.

III) Se $c \in I - \{\sup I, \inf I\}$ allora $\exists \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \cap]-\infty, c[\}$ e $\exists \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \cap]c, +\infty[\}$.

45. Funzione continua

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Diciamo che f è ***continua in c*** quando esiste $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Diciamo che f è ***continua*** quando è continua in ogni punto di I.

46. Teorema sulla somma di funzioni continue

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue, $c \in I$. La somma di f e g è ancora una funzione continua. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + f(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = f(c) + g(c)$.

47. Teorema sulle funzioni continue (i, ii)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Sono equivalenti:

i) f è continua in c.

ii) Qualsiasi sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in I, tale che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = c$, si ha $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c)$.

In tal caso $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} a_n\right)$.

48. Teorema sulla continuità della funzione composta

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Se f è continua in c e g è continua in $f(c)$, allora $g \circ f$ è continua in c.

49. Funzione segno

Sia $x \in \mathbb{R}$. Definiamo ***funzione segno*** la funzione:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

50. Teorema degli zeri *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a, b \in I$ con $a < b$, $f : I \to \mathbb{R}$. Se:

a) f è continua;

b) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.

51. Teorema dei valori intermedi

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a, b \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$. Se:

a) f è continua;

b) $f(a) < m$ e $f(b) > m$;

allora $\exists c \in]a,b[$ tale che $f(c) = m$.

Questo teorema assicura che si possa fare la radice di un qualunque numero positivo.

52. Teorema di Weierstrass

Siano $[a,b] \in \mathbb{R}$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua allora esistono $\max f$ e $\min f$ e f è limitata.

53. Rapporto incrementale

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0, x_1 \in I$, con $x_0 \neq x_1$. Chiamiamo ***rapporto incrementale*** per f in x_0 e x_1 il numero $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \mathrm{R}_f(x_0, x_1)$.

54. Derivata

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Diciamo che f è ***derivabile in c*** quando esiste reale $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Tale limite si chiama ***derivata di f in c*** e si indica come $f'(c)$, $\dfrac{df}{dx}(c)$, $\dfrac{d}{dx} f(c)$, $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=c}$, $Df(c)$.

55. Teoremi sull'algebra delle derivate (I, II *, III *)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f, g: I \to \mathbb{R}$ derivabili in c.

I) La funzione $x \mapsto f(x) + g(x)$ è derivabile in c e $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

II) La funzione $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in c e $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$.

III) Se $g(c) \neq 0$ allora la funzione $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ è derivabile in c e $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(c) = \dfrac{-g'(c)}{(g(c))^2}$.

56. Teorema sulla derivata di funzione composta

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$, $c \in I$. Se f è derivabile in c e g è derivabile in $f(c)$ allora $g \circ f$ è derivabile in c e $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

57. Retta tangente

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in c. Chiamiamo ***retta tangente*** al grafico di f nel punto di ascissa c la retta di equazione $y = f'(c)(x - c) + f(c)$.

58. Teorema sulla caratterizzazione di funzioni derivabili (i, ii, iii) *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

i) f è derivabile in c.

ii) Esistono $l \in \mathbb{R}$, $\varphi: I \to \mathbb{R}$ continua in c tali che $\varphi(c) = 0$ e $\forall x \in I$
$f(x) = f(c) + l(x - c) + \varphi(x)(x - c)$.

iii) Esiste $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$ continua in c tale che $\forall x \in I \quad f(x) = f(c) + \varphi_1(x)(x-c)$.

In tal caso $f'(c) = l = \varphi_1(c)$.

59. Teorema sulla continuità di funzioni derivabili

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in c allora f è continua in c.

60. Teorema sulla derivata di funzione inversa

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ invertibile, $c \in I$. Se f è derivabile in c, $f'(c) \neq 0$ e f^{-1} è continua, allora f^{-1} è derivabile in $f(c)$ e $\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$.

61. Funzione arcoseno

Chiamiamo ***arcoseno*** e indichiamo con arcsen la funzione $\left(\operatorname{sen}\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$. Scriviamo quindi $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \underset{\text{1-1}}{\overset{\text{su}}{\to}} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ per indicare che la funzione arcsen di dominio $[-1,1]$ è iniettiva (indicato da "1-1") sull'immagine (indicato da "su") $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

62. Funzione arcocoseno

Chiamiamo ***arcocoseno*** e indichiamo con arcos la funzione $\left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$. Scriviamo quindi $\arccos : [-1,1] \underset{\text{1-1}}{\overset{\text{su}}{\to}} [0,\pi]$.

63. Funzione arcotangente

Chiamiamo ***arcotangente*** e indichiamo con arctg la funzione $\left(\operatorname{tg}\big|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}\right)^{-1}$. Scriviamo quindi $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

64. Seno iperbolico

Chiamiamo ***seno iperbolico*** e indichiamo con senh la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

65. Coseno iperbolico

Chiamiamo ***coseno iperbolico*** e indichiamo con cosh la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

66. Tangente iperbolica

Chiamiamo ***tangente iperbolica*** e indichiamo con tgh la $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

67. Massimo e minimo relativi

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in A$. Diciamo che c è ***punto di massimo relativo*** per f (o ***punto di massimo locale***) quando esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x \in A \cap]c-\delta, c+\delta[\quad f(x) \le f(c)$. In tal caso diciamo che $f(c)$ è ***massimo relativo*** (o ***massimo locale***). Diciamo che c è ***punto di massimo relativo forte*** per f quando esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x \in A \cap]c-\delta, c+\delta[- \{c\} \quad f(x) < f(c)$.

Diciamo che c è ***punto di minimo relativo*** per f (o ***punto di minimo locale***) quando esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x \in A \cap]c-\delta, c+\delta[\quad f(x) \ge f(c)$. In tal caso diciamo che $f(c)$ è ***minimo relativo*** (o ***minimo locale***). Diciamo che c è ***punto di minimo relativo forte*** per f quando esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x \in A \cap]c-\delta, c+\delta[- \{c\} \quad f(x) > f(c)$.

Chiamiamo ***estremo relativo*** un massimo o un minimo relativo. Chiamiamo ***estremante relativo*** un punto di massimo o un punto di minimo relativo.

68. Teorema di Fermat *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$. Se f è derivabile in c e c è estremante relativo per f allora $f'(c) = 0$. Si ricordi che non vale il contrario.

69. Teorema di Rolle *

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se:

a) f è continua su $[a,b]$;

b) f è derivabile su $]a,b[$;

c) $f(a) = f(b)$;

allora esiste $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = 0$.

70. Teorema del valor medio o di Lagrange *

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se:

a) f è continua su $[a,b]$;

b) f è derivabile su $]a,b[$;

allora esiste $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

71. Teorema sulle funzioni a derivata nulla *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Se $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$ allora f è costante. Vale a dire: $\forall x \in I \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in I \quad f(x) = m$.

72. Teorema di relazione tra crescenza e segno della derivata

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in c. Se f è crescente allora $f'(c) \geq 0$. Si noti che $f'(c) \geq 0$ anche se f è strettamente crescente.

73. Test di monotonia (I, II) *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su $I - \{\sup I, \inf I\}$ e continua su I.

I) Se $\forall x \in I - \{\sup I, \inf I\} \quad f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) allora f è crescente (risp. decrescente).

II) Se $\forall x \in I - \{\sup I, \inf I\} \quad f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).

74. Teorema di relazione tra segno della derivata e estremanti (I *, II)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I - \{\sup I, \inf I\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I e derivabile su $I - \{c\}$.

I) Se esistono $a, b \in I$ con $a < c < b$ tale che $\forall x \in \,]a, c[\quad f'(x) \geq 0$ e $\forall x \in \,]c, b[\quad f'(x) \leq 0$ allora c è punto di massimo relativo per f.

II) Se esistono $a, b \in I$ con $a < c < b$ tale che $\forall x \in \,]a, c[\quad f'(x) \leq 0$ e $\forall x \in \,]c, b[\quad f'(x) \geq 0$ allora c è punto di minimo relativo per f.

75. Derivata seconda

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Diciamo che f è ***derivabile due volte in c*** quando f' è derivabile in c. la derivata di f' in c si chiama ***derivata seconda di f in c*** e si indica con $f''(c)$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(c)$, $D^2 f(c)$.

76. Teorema de l'Hopital (1^ forma) *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in c. Se:

a) $f(c) = g(c) = 0$;

b) $g'(c) \neq 0$;

allora esiste $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

77. Teorema de l'Hopital (2^ forma)

Siano $a, c \in \mathbb{R}^*$ con $a < c$, $f, g : \,]a, c[\to \mathbb{R}$. Se:

a) f e g sono derivabili;

b) $\forall x \in]a,c[\quad g'(x) \neq 0$;

c) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$;

d) esiste $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

78. o piccolo

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$, $f, g : I - \{c\} \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f(x)$ è ***o piccolo*** di $g(x)$ per x che tende a c, e scriviamo $f(x) = o(g(x))$, $x \to c$, quando $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

79. Polinomio di Taylor

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte su I e n volte in c. Chiamiamo ***polinomio di Taylor*** di ordine n e punto iniziale c per la funzione f il polinomio $T_{n,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k$.

80. Formula di Taylor con resto secondo Peano

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte su I e n volte in c. Allora: $f(x) = T_{n,c}(x) + o(x-c)^n \quad x \to c$. Vale a dire: $\lim_{x\to c} \frac{f(x) - T_{n,c}(x)}{(x-c)^n} = 0$.

81. Formula di Taylor con resto secondo Lagrange

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte. Qualunque sia $x \in I - \{c\}$ esiste d compreso tra x e c tale che $f(x) = T_{n,c}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(d)(x-c)^{n+1}$.

82. Asintotica equivalenza

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I \cup \{\sup I, \inf I\}$, $f, g : I - \{c\} \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f(x)$ è ***asintoticamente equivalente*** a $g(x)$ per x che tende a c, e scriviamo $f(x) \sim g(x)$, $x \to c$ quando $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Nota: $f(x) \sim g(x),\ x \to c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)\big(1 + o(1)\big)$.

83. Convessità e concavità di funzioni

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Diciamo che f è ***convessa*** quando $\forall x, c \in I \quad f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$. Diciamo che f è ***concava*** quando $\forall x, c \in I$ $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x-c)$.

84. Teorema sulle funzioni convesse (i, ii) *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Sono equivalenti:

i) f è convessa.

ii) f' è crescente.

85. Test di convessità (i, ii) *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Sono equivalenti:

i) f è convessa.

ii) $\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$.

86. Teorema di relazione tra convessità e minimo assoluto *

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, $c \in I$. Se f è convessa e $f'(c) = 0$, allora c è punto di minimo assoluto per f.

87. Teorema di relazione tra derivata prima, segno di derivata seconda ed estremanti relativi (I, II)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e derivabile due volte in c.

I) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ allora c è punto di minimo relativo per f.

II) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ allora c è punto di massimo relativo per f.

88. Punto di flesso

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I - \{\sup I, \inf I\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Diciamo che c è ***punto di flesso*** per f quando esistono $a, b \in I$, con $a < c < b$, tali che $f\big|_{[a,c]}$ è concava e $f\big|_{[c,b]}$ è convessa, oppure tali che $f\big|_{[a,c]}$ è convessa e $f\big|_{[c,b]}$ è concava.

89. Teorema di relazione tra punto di flesso e derivata seconda

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I - \{\sup I, \inf I\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e derivabile due volte in c. Se c è punto di flesso per f, allora $f''(c) = 0$. Si ricordi che non vale il contrario.

90. Parità e disparità di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è ***pari*** quando $\forall x \in A \quad -x \in A$ e $f(-x) = f(x)$. Diciamo che f è ***dispari*** quando $\forall x \in A \quad -x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$.

91. Periodicità di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^+$. Diciamo che f è ***periodica*** di periodo T quando $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x + T \in A$ e in tal caso $f(x+T) = f(x)$.

92. Asintoti

La retta $x = c$ è ***asintoto verticale*** per f quando $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.

La retta $y = y_0$ è ***asintoto orizzontale*** per f quando $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ oppure $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

La retta $y = ax + b$ (con $a \neq 0$) è ***asintoto obliquo*** per f quando $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ oppure $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

93. Integrale

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Per $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $k = 1,2,\ldots,n$ poniamo $\xi_{n,k} = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Per $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ poniamo $s_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{n,k}\right)$. Si può dimostrare che esiste reale $\lim_{n \to \infty} s_n$. Chiamiamo ***integrale*** su $[a,b]$ di f tale limite e lo indichiamo con $\int_a^b f(x)\,dx$.

94. Teorema sulla linearità dell'integrale (I *, II)

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $\lambda \in \mathbb{R}$, allora:

I) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

II) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

95. Teorema sulla monotonia dell'integrale

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Se $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

96. Teorema sul valore assoluto di integrali *

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

97. Teorema della media integrale *

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora esiste $c \in [a,b]$ tale che $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

98. Teorema sull'algebra degli integrali

Siano $[a,c] \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \,]a,c[$, $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ continua, allora $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

99. Primo teorema fondamentale del calcolo integrale *

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. $\forall x \in [a,b]$ poniamo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Allora F è derivabile e $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x)$. Chiamiamo $F(x)$ ***funzione integrale*** per f.

100. Primitiva

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $G, f : I \to \mathbb{R}$ con G derivabile. Diciamo che G è una ***primitiva*** di f quando $\forall x \in I \quad G'(x) = f(x)$.

101. Teorema sulle primitive di funzione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f, G_1, G_2 : I \to \mathbb{R}$ con G_1, G_2 derivabili. Se G_1 e G_2 sono primitive di f allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in I \quad G_2(x) = G_1(x) + c$.

102. Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale *

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ con f continua e G derivabile. Se G è una primitiva di f allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ e si indica: $\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b$.

103. Teorema di integrazione per parti *

Siano $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ con f derivabile con derivata continua, g continua e G primitiva di g. Allora: $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = [f(x)\,G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx$.

104. Teorema di integrazione per sostituzione (1^ forma) *

Siano $[a,b], [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ derivabile con derivata continua. Allora: $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

105. Teorema di integrazione per sostituzione (2^ forma)

Siano $[a,b], [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\varphi : [\alpha,\beta] \underset{\text{1-1}}{\overset{\text{su}}{\longrightarrow}} [a,b]$ derivabile con derivata continua. Allora: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.