

**Analisi matematica L-B**

Anno accademico 2006/2007

Docente prof. Enrico Obrecht

# ***APPUNTI***

*Riccardo Trevisan*

28 marzo 2007



# SOMMARIO

<b>1. Numeri complessi.....</b>	<b>1</b>
1.1 Spazio vettoriale .....	1
1.2 Campo complesso.....	1
1.3 Elemento neutro moltiplicativo e reciproco.....	1
1.4 Unità immaginaria e forma algebrica.....	2
1.5 Piano complesso.....	2
1.6 Complesso coniugato.....	2
1.7 Modulo.....	3
1.8 Argomento e forma trigonometrica.....	3
1.9 Forma esponenziale.....	4
1.10 Equazioni in campo complesso e radici $n$ -esime .....	5
1.11 Esponenziale complesso.....	6
1.12 Derivabilità in campo complesso.....	7
<b>2. Integrali generalizzati.....</b>	<b>8</b>
2.1 Funzioni integrabili e integrale generalizzato.....	8
2.2 Proprietà degli integrali generalizzati .....	8
2.3 Il confronto per gli integrali generalizzati .....	8
2.4 Integrazione su intervalli aperti .....	9
<b>3. Serie numeriche.....</b>	<b>11</b>
3.1 Successioni e serie .....	11
3.2 Convergenza delle serie.....	11
3.3 Criteri di calcolo delle serie.....	12
<b>4. Funzioni di più variabili.....</b>	<b>15</b>
4.1 Modulo di un vettore .....	15
4.2 Prodotto scalare.....	15
4.3 Punti e insiemi.....	16
4.4 Definizioni di insiemi .....	17
4.5 Successioni vettoriali e limiti di successioni vettoriali.....	19
4.6 Continuità delle funzioni di più variabili .....	21
4.7 Proprietà topologiche delle funzioni continue .....	21
4.8 Limite delle funzioni di più variabili .....	23
<b>5. Calcolo differenziale .....</b>	<b>25</b>
5.1 Derivate parziali .....	25
5.2 Differenziabilità .....	25
5.3 Gradiente e derivate direzionali .....	26

5.4	Differenziabilità per funzioni a valori vettoriali e matrice jacobiana.....	27
5.5	Calcolo di differenziali .....	29
5.6	Derivate parziali di ordine superiore.....	30
5.7	Massimi e minimi.....	31
5.8	Formula di Taylor e matrice hessiana.....	31
5.9	Forme quadratiche.....	33
5.10	Studio dei punti critici .....	34
<b>6.</b>	<b>Equazioni differenziali .....</b>	<b>35</b>
6.1	Equazione differenziale.....	35
6.2	Equazioni del primo ordine .....	35
6.3	Equazioni lineari del secondo ordine .....	37
6.4	Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine.....	39
6.5	Ricerca di una soluzione della non omogenea del secondo ordine.....	40
6.6	Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.....	41
<b>7.</b>	<b>Integrali multipli.....</b>	<b>42</b>
7.1	Integrale doppio su rettangoli .....	42
7.2	Proprietà e teoremi degli integrali doppi su rettangoli.....	43
7.3	Insiemi trascurabili di dimensione 2.....	43
7.4	Integrali doppi su insiemi con frontiera trascurabile, area .....	44
7.5	Insiemi semplici e teoremi di riduzione per gli integrali doppi.....	45
7.6	Integrali tripli su parallelepipedi rettangoli.....	45
7.7	Proprietà e teoremi degli integrali tripli, volume.....	46
7.8	Insiemi semplici e teoremi di riduzione per integrali tripli.....	47
7.9	Cambiamento di variabili negli integrali doppi, coordinate polari .....	48

**Nota:** nel presente compendio, si fa talvolta riferimento a due testi: Bramanti-Pagani-Salsa – *Matematica* (calcolo infinitesimale e algebra lineare), Zanichelli, Bologna 2004 e Casali-Gagliardi-Grasselli – *Geometria*, Esculapio – Progetto Leonardo, Bologna 2002. Per riferirsi a tali testi si farà uso, rispettivamente, delle abbreviazioni: “BPS – *Matematica*” e “CGG – *Geometria*”.

Si mette in guardia il lettore, infine, delle possibili inesattezze presenti nel compendio; l’esigenza di redigerlo il più in fretta possibile è sicuramente stata la causa delle numerose imprecisioni qui contenute. Qualora il lettore ne riscontrasse, si prega gentilmente di farlo presente all’autore che pubblicherà quanto prima un’edizione corretta.

È possibile contattarmi all’indirizzo [riccardo.trevisan@gmail.com](mailto:riccardo.trevisan@gmail.com).

# 1. NUMERI COMPLESSI

## 1.1 Spazio vettoriale

Consideriamo l'insieme  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ . La struttura formata dall'insieme  $\mathbb{R}^n$ , dall'insieme  $\mathbb{R}$ , dalla somma vettoriale e dal prodotto per scalare, può essere considerata spazio vettoriale, poiché ne soddisfa gli assiomi (CGG - *Geometria*, Def. 4.1). I suoi elementi si identificano come *vettori*.

Siano  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^n$ . Diciamo che tali vettori sono *linearmente indipendenti* quando:

$$\left( \sum_{i=1}^p c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \right) \Rightarrow (c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0)$$

Pertanto, se il numero di vettori è superiore alla dimensione dello spazio vettoriale ( $p > n$ ), essi sono, per forza, linearmente dipendenti.

Pensando i vettori in uno spazio bidimensionale, essi sono linearmente dipendenti quando si trovano allineati su una stessa retta; in uno spazio tridimensionale, invece, vettori linearmente dipendenti giacciono su di uno stesso piano.

Sia  $\mathbf{V}$  spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$ . Diciamo che  $\mathbf{V}$  ha dimensione  $n$  quando:

- $\exists \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$  che generano lo spazio;
- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  sono linearmente indipendenti.

## 1.2 Campo complesso

Consideriamo un insieme  $\mathbb{C}$  con le stesse proprietà di  $\mathbb{R}^2$ . Definiremo, qui di seguito, una moltiplicazione interna tale che  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  sia un campo.

Chiamiamo  $\mathbb{C}$  insieme dei numeri complessi e supponiamo che  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  sia un campo. Definiamo ora l'operazione di somma e prodotto in tale campo. Dati  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}$ , definiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} + \mathbf{w} &= (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} &= (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1) \end{aligned}$$

È possibile dimostrare che  $(\mathbb{C} - \{(0,0)\}, +, \cdot)$  è un gruppo commutativo e che il prodotto così definito è distributivo rispetto alla somma; si può quindi affermare che  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  è un campo.

## 1.3 Elemento neutro moltiplicativo e reciproco

Occorre ora cercare l'elemento neutro moltiplicativo di tale campo. Dati  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ , l'elemento neutro  $\mathbf{a}$  dovrà verificare che:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{z}$$

Per trovare  $\mathbf{a}$  è sufficiente risolvere il sistema generato da:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{a} = (z_1 a_1 - z_2 a_2, z_1 a_2 + z_2 a_1) = (z_1, z_2)$$

Per  $z_1 \neq 0$  otteniamo  $\mathbf{a} = (1, 0)$  che risulta quindi essere l'elemento neutro moltiplicativo.  $\square$

Cerchiamo ora il reciproco di  $\mathbf{z}$ , ossia quel numero  $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}$  tale che:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1) = (1, 0)$$

Per  $z_1 \neq 0$  si ottiene che:

$$\frac{1}{(z_1, z_2)} = \left( \frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2}, -\frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2} \right)$$

## 1.4 Unità immaginaria e forma algebrica

Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $(a, b) \in \mathbb{C}$ , facciamo le seguenti considerazioni:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

$$i \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$$

$$i \cdot i = i^2 = (-1, 0)$$

$$(a, b) \stackrel{?}{=} a + b(0, 1) = a + bi$$

Lo scopo è quindi trattare  $a$  e  $b$  come numeri, al fine di semplificare il calcolo. Per poterlo fare è necessario dimostrare che  $\mathbb{C}_1 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  è sottocampo di  $\mathbb{C}$ . Inoltre occorre definire un omomorfismo  $g$  di  $\mathbb{C}_1$  in  $\mathbb{R}$  ( $g : \mathbb{C}_1 \xrightarrow[1-1]{\text{su}} \mathbb{R}$ ) per rendere  $\mathbb{C}_1$  e  $\mathbb{R}$  isomorfi e tale che  $g((a, 0)) = a$ .

Posta  $i$  **unità immaginaria**, abbiamo quindi definito la **forma algebrica** del numero complesso nel seguente modo:

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a + bi = z$$

## 1.5 Piano complesso

Definiamo ora un piano complesso che ospiterà i numeri complessi. Dato  $z \in \mathbb{C}$  chiamiamo  $a$  **parte reale** di  $z$  e  $b$  **coefficiente dell'immaginario** ( $a = \text{Re } z, b = \text{Im } z$ ). L'asse delle ascisse del piano complesso si chiamerà **asse reale** e quello delle ordinate **asse immaginario**. Parte reale e coefficiente dell'immaginario determinano univocamente la posizione di un numero complesso sul piano complesso come fossero le sue coordinate.

## 1.6 Complesso coniugato

Sia  $z = (a + bi) \in \mathbb{C}$ . Definiamo **coniugato** di  $z$  il numero complesso

$$\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} a - bi.$$

Vale la seguente importante proprietà:

$$z \cdot \bar{z} = (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Inoltre,  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ , valgono anche le seguenti proprietà:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}; \quad \overline{\bar{z}} = z; \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}; \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}; \quad \overline{i} = -i; \quad \overline{\bar{2}} = 2$$

Tutte facilmente dimostrabili a partire dalla definizione.

## 1.7 Modulo

Sia  $z = (a + bi) \in \mathbb{C}$ . Definiamo **modulo** di  $z$  il numero reale

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ , valgono le seguenti proprietà:

I)  $|z| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

II)  $|z \cdot w| = |z| |w|$

III)  $|z + w| \leq |z| + |w|$

IV)  $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Inoltre:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

La proprietà I) è immediata, la II) si dimostra facilmente scomponendo il quadrato del modulo come prodotto di  $z \cdot w$  per il suo coniugato. Per la III) e la IV) si rimanda al BPS - *Matematica*, cap. 1, par. 8.2; è comunque opportuno, anche in questo caso, elevare al quadrato entrambi i membri.

Per come è costruito, in  $\mathbb{C}$  non è possibile definire relazione d'ordine, infatti, supposto  $i \geq 0 \Rightarrow i^2 \geq 0$ , mentre sappiamo che  $i^2 = -1 < 0$ .

## 1.8 Argomento e forma trigonometrica

Osserviamo queste considerazioni:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = |z| \frac{z}{|z|}$$

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} |z| \in \mathbb{R}^+, \quad \left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{||z||} = 1$$

Consideriamo ora una circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine e notiamo come le coordinate di un qualsiasi punto appartenente alla circonferenza siano date dalla coppia ordinata:  $(\cos t, \sin t)$ . Immaginando tale circonferenza su di un piano complesso,  $(\cos t, \sin t)$  diventano le coordinate del numero complesso di modulo unitario  $\frac{z}{|z|}$ .

Pertanto:

$$\exists t \in \mathbb{R} : \frac{z}{|z|} = \cos t + i \sin t$$

Siano  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Diciamo che  $t$  è un **argomento** di  $z$  quando verifica che:

$$\frac{z}{|z|} = \cos t + i \sin t.$$

Esso possiede le seguenti proprietà:

I)  $t \in \arg z \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, t + 2k\pi$  è ancora  $\arg z$

II)  $t, s \in \arg z \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : t - s = 2h\pi$

Si noti quindi, che la misura in radianti dell'angolo formato dalla semiretta reale positiva e dalla semiretta uscente dall'origine e passante per  $z$  è uno degli argomenti di  $z$ .

Possiamo quindi scrivere:

$$z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad z = \rho(\cos t + i \sin t)$$

Tale scrittura è detta **forma trigonometrica** nel numero complesso  $z$ .

## 1.9 Forma esponenziale

Osserviamo che l'argomento di seno e coseno della forma trigonometrica è il medesimo e possiamo quindi definire una nuova funzione, che chiameremo "cis", che raggruppi le due precedenti:

$$\text{cis} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{cis } t = \cos t + i \sin t$$

$$z = \rho \text{cis } t$$

Si noti che moltiplicare un versore del piano complesso per  $\text{cis } t$ , equivale ad applicargli una rotazione di un angolo  $t$ , mentre moltiplicare lo stesso versore per  $\rho \text{cis } t$ , equivale ad applicargli la rototraslazione di modulo  $\rho$  e angolo  $t$ .

Definiamo ora l'esponenziale complesso nel seguente modo:

$$e^{it} = \text{cis } t$$

È dunque necessario verificare:

$$e^{it} \cdot e^{is} \stackrel{?}{=} e^{i(t+s)} = \text{cis}(t+s)$$

Si verifica sostituendo agli esponenziali complessi le relative forme trigonometriche e sfruttando le formule di addizione dei seni e coseni.

Riportiamoci al piano complesso.  $e^{it}$  e  $e^{is}$  identificano univocamente due punti sulla circonferenza di raggio unitario e con centro nell'origine. Moltiplicandoli fra loro otteniamo un nuovo punto sulla medesima circonferenza il cui angolo dalla semiretta reale positiva è dato dalla somma  $t + s$ .

Si possono verificare, quindi, le seguenti osservazioni:

$$w \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad w = |w|e^{is}$$

$$w \cdot e^{it} = (|w|e^{is})e^{it} = |w|e^{i(s+t)}$$

$$w, z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad w \cdot z = (|w|e^{is})(|z|e^{it}) = |w||z|e^{i(s+t)}$$

Chiamiamo **forma esponenziale** del numero complesso  $z$  la scrittura:

$$z = \rho e^{it}$$



$t$  rappresenta l'argomento della forma esponenziale e ci occuperemo ora di come calcolarlo. □

Sia  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Sappiamo che  $z = |z|e^{it}$ . Nel caso  $\operatorname{Re} z > 0$  occorre trovare:

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : z = |z|e^{it}$$

Posto  $z = a + ib$ , sappiamo dalla forma trigonometrica che  $a = |z|\cos t$  e  $b = |z|\sin t$ , possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} t = \frac{b}{a} \\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

che per  $\operatorname{Re} z > 0$  dà luogo a  $t = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ . Per  $\operatorname{Re} z < 0$  tale formula non avrebbe senso, poiché  $\forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \cos t > 0$ . Pertanto essa sarà:  $t = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ . Riepiloghiamo:

$$t = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} & \text{se } \operatorname{Re} z > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} & \text{se } \operatorname{Re} z < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Si deducono, inoltre, due evidenti proprietà:

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \quad e^{i(t+2k\pi)} &= e^{it} \\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \bar{z} &= \overline{|z|e^{is}} = |z|e^{-is} \end{aligned}$$

□

Concludiamo con l'enunciare la **formula di de Moivre** dimostrabile con una semplice verifica a partire dalle affermazioni precedenti.

Siano  $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $z = |z|e^{it}$ ,  $w = |w|e^{is}$ . Allora:

$$z \cdot w = |z||w|e^{i(t+s)}$$

## 1.10 Equazioni in campo complesso e radici $n$ -esime

Si supponga di dover risolvere la seguente equazione:

$$a \in \mathbb{C}, \quad z^n = a$$

Un primo caso è dato da  $a = 0$  e questo si verifica unicamente se anche  $z = 0$ . Il secondo caso è dato da  $a \neq 0$ . In tal caso si osservino i seguenti passaggi considerando sempre  $a = |a|e^{it}$ ,  $z = |z|e^{is}$ ,  $|a|, t$  noti,  $|z|, s$  incognite,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\exists z \in \mathbb{C} : z^n = a \Rightarrow z \neq 0$$

$$z \text{ è soluzione} \Leftrightarrow |z|^n e^{ins} = |a|e^{it} \Rightarrow |z|^n = |a|, e^{ins} = e^{it}$$

$$|z|^n = |a| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}$$

$$e^{ins} = e^{it} \Leftrightarrow ns - t = 2k\pi \Leftrightarrow s = \frac{t + 2k\pi}{n}$$

$$\left( \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{t+2k\pi}{n}} \right)^n = |a|e^{i(t+2k\pi)} = |a|e^{it} = a$$

Le  $n$  soluzioni dell'equazione  $z^n = a$  verranno dunque chiamate radici  $n$ -esime del numero complesso  $a$ . Disponendo tali radici sul piano complesso, si nota che esse si trovano ai vertici del poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio  $\sqrt[n]{|a|}$ , con il vertice di  $z_0$  posto nel punto di argomento  $s_0 = \frac{t}{n}$ . Ogni 'spicchio' di circonferenza avrà invece ampiezza  $s_{k+1} - s_k = \frac{2\pi}{n}$ . Infatti si ha:

$$s_0 = \frac{t}{n}, s_1 = \frac{t}{n} + \frac{2\pi}{n}, s_2 = \frac{t}{n} + \frac{4\pi}{n}, s_3 = \frac{t}{n} + \frac{6\pi}{n}, \dots$$

□

Sia  $P(z) = 0$  equazione in  $z$ . Diciamo che  $z_0$  è **radice  $n$ -esima** dell'equazione  $P(z) = 0$  se e solo se  $P(z) = P(z - z_0)^n \cdot Q(z)$  con  $Q(z_0) \neq 0$ . (Vedi anche CGG - *Geometria*, Def. A.4).

□

Concludiamo con un'ultima considerazione. Con seguenti passaggi si vuole indicare come dimostrare che in un'equazione in  $\mathbb{C}$  a coefficienti reali, se  $z_0$  è soluzione, anche  $\bar{z}_0$  lo è, poiché verifica l'equazione data.

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ in } \mathbb{C}, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, z_0 \text{ è soluzione}$$

$$az_0^2 + bz_0 + c = 0 \Rightarrow \overline{az_0^2 + bz_0 + c} = \bar{0} \Rightarrow a\bar{z}_0^2 + b\bar{z}_0 + c = 0$$

## 1.11 Esponenziale complesso

Ci poniamo ora il problema di rappresentare un numero  $e^z$  dove  $z \in \mathbb{C}$  e  $z = a + ib$ . Definiamo quindi l'esponenziale complesso nel seguente modo:

$$e^z = e^{a+ib} \stackrel{\text{def}}{=} e^a \cdot e^{ib}$$

Si invita il lettore a verificare che per l'esponenziale complesso valgono tutte le proprietà delle potenze e dei numeri complessi. Calcoliamo, invece, l'espressione del modulo di  $e^z$ .

$$|e^z| = \left| e^{\text{Re}z} \right| \left| e^{i\text{Im}z} \right| = e^{\text{Re}z} \cdot 1 = e^{\text{Re}z}$$

Si noti dalla definizione, inoltre, che  $b$  è proprio un argomento del numero complesso.

□

Analizziamo l'equazione  $e^z = a$  e cerchiamone le soluzioni. Innanzitutto, la funzione, biiettiva in  $\mathbb{R}$ , non lo è in  $\mathbb{C}$ . Se poi  $a = 0$ , non vi è soluzione, poiché  $e^{\text{Re}z} \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ . Consideriamo quindi:

$$\begin{aligned}
e^z &= a, z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C} - \{0\} \\
e^z = a &\Leftrightarrow e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = |a| e^{it} \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re} z} = |a|, e^{i \operatorname{Im} z} = e^{it} \\
e^{\operatorname{Re} z} &= |a| \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \log |a| \\
e^{i \operatorname{Im} z} &= e^{it} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Riepilogando:

$$e^z = a \Leftrightarrow z = \log |a| + i(t + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

## 1.12 Derivabilità in campo complesso

Si osservino i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
w : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} & w(t) &= \operatorname{Re} w(t) + i \operatorname{Im} w(t) \\
k \in \mathbb{C} & & k &= \operatorname{Re} k + i \operatorname{Im} k \\
w(t) &= e^{kt} = e^{(\operatorname{Re} k)t} (\cos((\operatorname{Im} k)t) + i \sin((\operatorname{Im} k)t)) \\
\operatorname{Re} k &= 0 &\Rightarrow w'(t) &= i(\operatorname{Im} k) e^{i(\operatorname{Im} k)t}
\end{aligned}$$

Si è dimostrato che  $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow D e^{i\beta t} = i\beta e^{i\beta t}$ . Con alcuni semplici passaggi si verifica che anche  $\forall k \in \mathbb{C} \quad w'(t) = k e^{kt}$ .

## 2. INTEGRALI GENERALIZZATI

### 2.1 Funzioni integrabili e integrale generalizzato

In alcuni casi, può essere necessario calcolare integrali di funzioni discontinue, illimitate, o integrali estesi a intervalli illimitati. Per questo motivo è necessario studiare l'integrabilità delle funzioni e, se possibile, calcolarne l'integrale generalizzato.

Siano  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (a, +\infty]$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ . Diciamo che  $f$  è **integrabile in senso generalizzato** sull'intervallo  $[a, b)$  quando esiste reale il limite  $\lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(t) dt$ . In tal caso, il numero reale  $\lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(t) dt$  verrà detto **integrale generalizzato** di  $f$  in  $[a, b)$  e verrà indicato col simbolo  $\int_a^b f(t) dt$ .

### 2.2 Proprietà degli integrali generalizzati

Per gli integrali generalizzati vale la seguente relazione:

$$\forall y_1, y_2 \in [a, b), y_1 < y_2$$

$$\int_{y_1}^{y_2} f(t) dt \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in [a, b), f(y) \geq 0$$

La relazione  $\Leftarrow$  si dimostra per monotonia dell'integrale, mentre la relazione opposta si dimostra per assurdo. Infatti, se la funzione fosse tutta negativa, per  $y_0 \in [a, b)$  esisterebbe almeno un  $\delta \in \mathbb{R}^+$  per il quale  $\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} f(t) dt < 0$ .

□

Siano  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (a, +\infty]$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b); \mathbb{R})$ . Allora la funzione tale che  $y \mapsto \int_a^y f(t) dt$  è crescente (risp. decrescente) se e solo se  $\forall t \in [a, b), f(t) \geq 0$  (risp.  $f(t) \leq 0$ ).

□

È facile dimostrare che il convergere di una funzione  $g(t)$  ad un numero  $l \in \mathbb{R}^+$  per  $t \rightarrow +\infty$  non è condizione sufficiente affinché la funzione sia integrabile in senso generalizzato sull'intervallo  $[0, +\infty)$ . Si consideri, infatti,  $g(t) \geq \frac{l}{2}, \forall t \geq t_1$ ; suddividendo opportunamente l'integrale  $\int_0^y f(t) dt$  si nota che esso risulterà sempre maggiore o uguale alla somma  $\int_0^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1}^y \frac{l}{2} dt$ , il cui secondo termine diverge per  $y \rightarrow +\infty$ .

### 2.3 Il confronto per gli integrali generalizzati

Come vedremo in seguito, sarà fondamentale l'utilizzo di un criterio di confronto per stabilire l'integrabilità delle funzioni integrande. Pertanto riportiamo di seguito il risultato dello studio di integrabilità per la funzione  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

$$\exists \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi, la funzione  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , è integrabile a  $+\infty$  se e solo se  $\alpha > 1$ .

In modo analogo, si può verificare che:

$$\exists \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_y^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1 - \alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi, la funzione  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , è integrabile a  $0^+$  se e solo se  $\alpha < 1$ . □

Come già anticipato, vale il seguente **teorema di confronto** per gli integrali generalizzati.

Siano  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (a, +\infty]$ ,  $f, g \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ . Allora:

- I) Se  $\forall t \in [a, b)$ ,  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  e  $g$  è integrabile in senso generalizzato su  $[a, b)$ , allora  $f$  è integrabile in senso generalizzato su  $[a, b)$
- II) Se  $\forall t \in [a, b)$ ,  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  e  $f$  non è integrabile in senso generalizzato su  $[a, b)$ , allora  $g$  non è integrabile in senso generalizzato su  $[a, b)$
- III) Se  $\forall t \in [a, b)$ ,  $f(t) \geq 0$ ,  $g(t) \geq 0$  e  $f(t) \sim g(t)$  per  $t \rightarrow b^-$ , allora gli integrali generalizzati di  $f$  e  $g$  hanno lo stesso comportamento □

Data una generica funzione  $f(t)$ , è spesso utile maggiorarla con  $|f(t)|$ , poiché quest'ultima è particolarmente facile da studiare, in quanto non negativa (e di conseguenza la funzione integrale di  $|f(t)|$  sarà crescente). Perciò forniamo la seguente definizione.

Siano  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (a, +\infty]$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ . Diciamo che  $f$  è **assolutamente integrabile** in senso generalizzato quando  $|f|$  è integrabile in senso generalizzato. □

Sfruttando il teorema del confronto possiamo quindi enunciare anche il prossimo teorema.

Siano  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (a, +\infty]$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ . Se  $|f|$  è integrabile in senso generalizzato allora  $f$  è integrabile in senso generalizzato.

Vale a dire che l'assoluta integrabilità in senso generalizzato implica l'integrabilità in senso generalizzato.

## 2.4 Integrazione su intervalli aperti

Come già evidenziato, talvolta è necessario calcolare integrali di funzioni su intervalli aperti sia a destra che a sinistra. Sfruttiamo quindi la seguente definizione.

Siano  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Diciamo che  $f$  è *integrabile in senso generalizzato* su  $I$  quando  $\exists c \in I$  tale che:

- a)  $f|_{(\inf I, c]}$  è integrabile in senso generalizzato;
- b)  $f|_{[c, \sup I)}$  è integrabile in senso generalizzato.

In tal caso chiamiamo integrale generalizzato di  $f$  su  $I$  il numero reale

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\inf I}^c f(x) dx + \int_c^{\sup I} f(x) dx$$

### 3. SERIE NUMERICHE

#### 3.1 Successioni e serie

Consideriamo una generica successione in  $\mathbb{R}$   $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e proviamo a sommarne tutti i termini. Otterremo una nuova successione i cui termini saranno i seguenti:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= s_0 + a_1 = a_0 + a_1 \\ s_2 &= s_1 + a_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} = a_0 + \dots + a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sarebbe quindi naturale chiedersi se esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  che verrebbe naturale indicare con  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ . Forniamo quindi la seguente definizione.

Chiamiamo **serie**, avente per successione dei termini la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la successione delle somme parziali  $\left( \sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  e la indichiamo con  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

#### 3.2 Convergenza delle serie

Diciamo che una serie converge quando  $s_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Allora notiamo che se  $s_n \rightarrow l$  allora anche  $s_{n+1} \rightarrow l$  e siccome  $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ , allora per forza  $a_{n+1} \rightarrow 0$ .

Condizione necessaria affinché una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converga è che  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Essa è solo una condizione necessaria ma non sufficiente, come dimostra, ad esempio, la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$  (chiamata *serie armonica semplice*) che, in realtà, non converge.

□

Se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge, allora chiamiamo il suo limite **somma della serie** e lo indichiamo con  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

Si noti, ad esempio, che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$  (chiamata *serie geometrica di ragione a*) converge (con somma  $\frac{1}{1-a}$ ) se e solo se  $|a| < 1$ .

□

I discorsi sinora svolti per le serie a valori in  $\mathbb{R}$ , continuano a valere per le serie a valori in  $\mathbb{C}$ .

□

Nello studio delle serie, è di particolare interesse la *serie esponenziale* di base  $a$  così definita:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ . Per semplicità, consideriamo l'esponenziale  $e^x$ , funzione  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ , che ha il seguente sviluppo in serie:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

È possibile scrivere il resto secondo Lagrange, che risulta:

$$R_{n,c}(x) = \frac{(D^{n+1}e^x)_{x=c}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Siccome fissato  $x$ ,  $e^c$  è limitato, si verifica che tale resto tende a zero e quindi è giustificato il nome “serie esponenziale” attribuito alla serie sopra definita, poiché:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

□

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  serie a termini reali oppure a termini complessi. Diciamo che  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  **converge assolutamente** quando la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$  converge.

□

L'assoluta convergenza di una serie implica la convergenza della serie stessa. Non vale il contrario.

### 3.3 Criteri di calcolo delle serie

Le serie numeriche, come si può già intuire, presentano delle analogie con gli integrali generalizzati, oltre che con le successioni. Ne è un esempio il **criterio del confronto** per le serie.

Siano  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  serie a termini reali non negativi. Allora:

- I) Se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  è convergente, allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente
- II) Se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  non è convergente, allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  non è convergente
- III) Se  $\exists c \in \mathbb{R}^+ : a_n \sim cb_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge se e solo se  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  converge

□

Segue in criterio efficace ma ‘pericoloso’ se utilizzato impropriamente, chiamato **criterio del rapporto**.

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  serie a termini reali positivi e supponiamo esista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$ .

Allora:

- I) Se  $l < 1$  la serie converge



- II) Se  $l > 1$  la serie non converge
- III) Se  $l = 1$  il criterio è inefficace, cioè esistono sia serie convergenti che serie non convergenti.

La dimostrazione si svolge supponendo che  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l < 1$ . Allora:

$$\begin{aligned} &\exists l' \in (l, 1), \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l' \\ &a_n \leq l' a_{n-1} \leq l'^2 a_{n-2} \leq \dots \leq l'^{n-1} a_1 \leq l'^n a_0 \\ &\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 l'^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} l'^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} l'^n \end{aligned}$$

Dove la serie geometrica di ragione  $l' \sum_{n=0}^{+\infty} l'^n$  è convergente poiché, per ipotesi  $l' \in (0, 1)$ . Dunque anche la serie di partenza è convergente per confronto. Analoghe considerazioni valgono per i casi  $l > 1$  e  $l = 1$ .

□

Di particolare utilità nel calcolo della convergenza delle serie a termini non negativi, è il **criterio della radice**, la cui dimostrazione è simile alla precedente.

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  serie a termini reali non negativi e supponiamo esista  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$ .

Allora:

- I) Se  $l < 1$  la serie converge
- II) Se  $l > 1$  la serie non converge
- III) Se  $l = 1$  il criterio è inefficace, cioè esistono sia serie convergenti che serie non convergenti.

□

Il seguente criterio prende in considerazione il caso che la serie non sia a termini tutti positivi, ma di segno alternato; esso prende il nome di **criterio di Leibniz**.

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  serie a termini di segno alternato con  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successione a termini positivi. Se:

- a)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è decrescente;
- b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ;

allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$  converge.

□

L'ultimo criterio per lo studio della convergenza prende il nome di **criterio integrale**, in quanto fa ricorso agli integrali generalizzati per conoscere il comportamento della serie.

Siano  $f \in \mathcal{C}([0, +\infty); \mathbb{R})$ ,  $f(x) > 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ ,  $f$  decrescente,  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Allora la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$  converge se e solo se  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge.

Per dimostrare questo importante risultato, consideriamo il grafico di una funzione del tipo  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . È facile convincersi della validità della seguente relazione:

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^n f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

In più sappiamo che se esiste il seguente limite, esso sarà:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n+1} f(x) dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y f(x) dx \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ = +\infty \end{cases}$$

Se l'integrale converge, possiamo scrivere:

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(x) dx < \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Inoltre:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(k) > \sum_{k=0}^n f(k) \geq \int_0^{n+1} f(x) dx$$

Con queste due considerazioni abbiamo dimostrato la doppia implicazione del teorema.

## 4. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

### 4.1 Modulo di un vettore

In  $\mathbb{R}^n$ , come in  $\mathbb{C}$ , non è possibile definire una relazione d'ordine, ma è tuttavia possibile ricondursi all'insieme dei reali dato un vettore di  $\mathbb{R}^n$ . Anche in questo caso grazie al modulo. Esso rappresenta, geometricamente, la sua distanza dall'origine del piano in cui giace.

Sia  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definiamo **modulo** di  $\mathbf{x}$  il numero reale

$$|\mathbf{x}| \stackrel{\text{def}}{=} |(x_1, \dots, x_n)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , possiede le seguenti proprietà:

- I)  $|\mathbf{x}| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad |\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- II)  $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$
- III)  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$
- IV)  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \geq ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||$

La proprietà I) e II) si deducono facilmente dalla definizione, mentre per dimostrare le proprietà III) e IV) occorre prima introdurre una nuova operazione fra vettori: il prodotto scalare.

### 4.2 Prodotto scalare

Siano  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , definiamo il loro **prodotto scalare**  $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , possiede le seguenti proprietà:

- I)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$  (distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma)
- II)  $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$  (distributiva del prodotto scalare rispetto al prodotto per scalare)
- III)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$  (commutativa)
- IV)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$

Tutte queste proprietà sono di facile dimostrazione a partire dalla definizione di prodotto scalare fra vettori. □

Nel caso  $n = 2$  si può pensare lo spazio  $\mathbb{R}^2$  come il campo  $\mathbb{C}$ . Ciò permette di fare qualche interessante considerazione. Poniamo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ . Il loro prodotto sarà:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \operatorname{Re}((x_1 + ix_2)(y_1 - iy_2)) = \operatorname{Re}((x_1 + ix_2)\overline{(y_1 + iy_2)}) = \\ &= \operatorname{Re}(|\mathbf{x}|e^{it} |\mathbf{y}|e^{-is}) = \operatorname{Re}(|\mathbf{x}||\mathbf{y}|e^{i(t-s)}) = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos(t-s) \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che il prodotto tra vettori di cui uno dei due sia nullo oppure il prodotto tra vettori perpendicolari fra loro è uguale a zero. Il prodotto di vettori con stessa direzione e stesso verso è uguale al prodotto dei moduli; il prodotto di vettori con stessa direzione e verso opposto è uguale all'opposto del prodotto dei moduli.

Nel caso  $n = 3$ , è possibile ancora una volta riportarsi al piano complesso, se consideriamo come spazio bidimensionale il piano comune ai due vettori.

□

Le considerazioni svolte sino ad ora ci permettono di dimostrare quasi completamente le proprietà III) e IV) del modulo di un vettore. Elevando al quadrato entrambi i membri della disequazione della proprietà III) e semplificando, si ottiene infatti:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

che ora dimostriamo. Se  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 0$  è già dimostrato, poiché  $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \geq 0 \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Se invece  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq 0$  occorre ricorrere alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

Questa si dimostra a partire dalla disuguaglianza

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \quad |\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}| \geq 0$$

Elevando al quadrato il modulo ed eseguendo quindi gli opportuni prodotti scalari si ottiene un polinomio di secondo grado in  $\lambda$  che risolve la disuguaglianza  $\geq 0$  per ogni  $\lambda$  quando il suo discriminante è  $\leq 0$ . Ciò equivale a scrivere:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

Questo dimostra la proprietà III) del modulo di un vettore. Per una dimostrazione rigorosa della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si rimanda al BPS - *Matematica*, cap. 2, teor. 3.4 o al CGG - *Geometria*, Prop. 8.1(d).

### 4.3 Punti e insiemi

Generalizziamo ora il concetto di punto interno ad un insieme (o intervallo) visto per l'insieme dei reali, al concetto di interno per uno spazio di dimensione maggiore.

Siano,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Definiamo **palla aperta** di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$  l'insieme:

$$B_r(\mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{c}| < r\}$$

Definiamo **palla chiusa** di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$  l'insieme:

$$\overline{B_r(\mathbf{c})} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{c}| \leq r\}$$

□

Proponiamoci ora di classificare i punti di  $\mathbb{R}^n$  in base all'appartenenza ad un insieme  $E$ .

Siano,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ .

Diciamo che  $\mathbf{c}$  è **punto interno** a  $E$  quando:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(\mathbf{c}) \subseteq E \quad (\Rightarrow \mathbf{c} \in E)$$

Diciamo che  $\mathbf{c}$  è **punto esterno** a  $E$  quando  $\mathbf{c}$  è punto interno a  $E'$  il complementare di  $E$ , ossia:

$$\exists s \in \mathbb{R}^+ : B_s(\mathbf{c}) \subseteq E' = \mathbb{R}^n - E \quad (\Rightarrow \mathbf{c} \in E')$$

Diciamo che  $\mathbf{c}$  è **punto di frontiera** per  $E$  quando  $\mathbf{c}$  non è punto interno a  $E$  e non è punto esterno a  $E$ .

Quest'ultima affermazione equivale a negare le due precedenti.

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(\mathbf{c}) \subseteq E$$

si nega dicendo che:

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \exists \mathbf{x}_r \in B_r(\mathbf{c}) - E \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}^+, B_r(\mathbf{c}) \cap E' \neq \emptyset$$

Mentre

$$\exists s \in \mathbb{R}^+ : B_s(\mathbf{c}) \subseteq E'$$

si nega dicendo che:

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \exists \mathbf{y}_s \in B_s(\mathbf{c}) - E' \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R}^+, B_s(\mathbf{c}) \cap E \neq \emptyset$$

□

D'ora in avanti useremo i seguenti simboli:

$$\text{Fr}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ è punto di frontiera per } E\}$$

$$\text{int}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} \text{ è punto interno a } E\}$$

□

Svolgiamo ora alcune considerazioni. Poniamo  $E = B_r(\mathbf{c})$ . Allora:

$$\mathbf{c} \in B_r(\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{c} \in \text{int}(B_r(\mathbf{c}))$$

$$|\mathbf{c}| > r \Rightarrow \mathbf{c} \in \text{int}(B_r(\mathbf{c})')$$

$$|\mathbf{c}| = r \Rightarrow \mathbf{c} \in \text{Fr}(B_r(\mathbf{c}))$$

Consideriamo ora  $E = \overline{B_r(\mathbf{c})} \supset B_r(\mathbf{c})$ .

$$|\mathbf{c}| < r \Rightarrow \mathbf{c} \in \text{int}(\overline{B_r(\mathbf{c})})$$

$$|\mathbf{c}| > r \Rightarrow \mathbf{c} \in \text{int}(\overline{B_r(\mathbf{c})}')$$

$$|\mathbf{c}| = r \Rightarrow \mathbf{c} \in \text{Fr}(\overline{B_r(\mathbf{c})})$$

## 4.4 Definizioni di insiemi

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Definiamo **chiusura** di  $E$  l'insieme

$$\overline{E} \stackrel{\text{def}}{=} E \cup \text{Fr}(E)$$

La chiusura di un insieme  $E$  ha la seguente caratteristica:

$$\bar{E} \supseteq E \supseteq \text{int}(E)$$

□

Diciamo che  $E$  è **aperto** quando  $E$  coincide con il suo interno ( $E = \text{int}(E)$ ).

Diciamo che  $E$  è **chiuso** quando  $E$  coincide con la sua chiusura ( $E = \bar{E}$ ).

Valgono quindi le seguenti osservazioni:

$$E \text{ è aperto} \Leftrightarrow E \cap \text{Fr}(E) = \emptyset$$

$$E \text{ è chiuso} \Leftrightarrow \text{Fr}(E) \subseteq E$$

$$\text{Fr}(E) = \text{Fr}(E')$$

$$\text{Fr}(\mathbb{R}^n) = \text{Fr}(\emptyset) = \emptyset$$

□

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $E$  è aperto se e solo se  $E'$  è chiuso.

Il teorema si dimostra facilmente osservando che:

$$E \text{ è aperto} \Leftrightarrow E \cap \text{Fr}(E) = \emptyset \Leftrightarrow E \cap \text{Fr}(E') = \emptyset \Leftrightarrow \text{Fr}(E') \subseteq E' \Leftrightarrow E' \text{ è chiuso}$$

□

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $E$  è **limitato** quando  $\exists k \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbf{x} \in E, |\mathbf{x}| \leq k$ . Ossia  $E \subseteq \overline{B_k(\mathbf{0})}$ .

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $E$  è **compatto** quando  $E$  è limitato e chiuso.

□

Siano  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione di insiemi inclusi in  $\mathbb{R}^n$ . Valgono quindi le seguenti osservazioni:

$$F_1, F_2 \text{ chiusi} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \text{ chiuso, } F_1 \cap F_2 \text{ chiuso}$$

$$F_k \text{ chiuso } \forall k \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k \text{ chiuso}$$

$$F_k \text{ chiuso } \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k=0}^{+\infty} F_k \text{ chiuso}$$

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione di insiemi inclusi in  $\mathbb{R}^n$ . Valgono quindi le seguenti osservazioni:

$$A_1, A_2 \text{ aperti} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \text{ aperto}$$

$$A_k \text{ aperto } \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \text{ aperto}$$

$$A_k \text{ aperto } \forall k \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \text{ aperto}$$

## 4.5 Successioni vettoriali e limiti di successioni vettoriali

Già conosciamo le successioni in  $\mathbb{R}$  e ci poniamo ora il problema di definirle in  $\mathbb{R}^n$ . Un insieme  $\{\mathbf{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è successione in  $\mathbb{R}^n$  quando  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a}_k = (a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$ . Si hanno, inoltre, le successioni componenti di  $\{\mathbf{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  date da:  $(\{a_{k_1}\}_{k \in \mathbb{N}}, \dots, \{a_{k_n}\}_{k \in \mathbb{N}})$ .

Sia  $\{\mathbf{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ . Diciamo che tale successione tende a  $\mathbf{l}$  quando  $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{l}\|$  tende a zero per  $k$  che tende a  $+\infty$ . Ossia:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{l} \Leftrightarrow \|\mathbf{a}_k - \mathbf{l}\| \rightarrow 0$ .

□

Ognuna delle successioni componenti  $\{a_{k_1}\}_{k \in \mathbb{N}}, \dots, \{a_{k_n}\}_{k \in \mathbb{N}}$  dovrà tendere a  $l_1, \dots, l_n$ . Nel caso  $n = 2$ , infatti, abbiamo:

$$\begin{aligned} a_{k_1} \rightarrow l_1 &\Leftrightarrow |a_{k_1} - l_1| \rightarrow 0 \\ |a_{k_1} - l_1| &= \sqrt{(a_{k_1} - l_1)^2}, \|\mathbf{a}_k - \mathbf{l}\| = \sqrt{(a_{k_1} - l_1)^2 + (a_{k_2} - l_2)^2} \\ 0 &\leq \sqrt{(a_{k_1} - l_1)^2} \leq \sqrt{(a_{k_1} - l_1)^2 + (a_{k_2} - l_2)^2} \end{aligned}$$

e siccome  $0 \rightarrow 0$  e  $\sqrt{(a_{k_1} - l_1)^2 + (a_{k_2} - l_2)^2} \rightarrow 0$ , per il teorema del confronto, anche  $\sqrt{(a_{k_1} - l_1)^2} \rightarrow 0$ .

In modo analogo, poiché vale la seguente relazione:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \sqrt{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

si può eseguire la seguente maggiorazione:

$$\sqrt{(a_{k_1} - l_1)^2 + (a_{k_2} - l_2)^2} \leq |a_{k_1} - l_1| + |a_{k_2} - l_2|$$

e dimostrare che siccome i due moduli tendono a zero, anche la radice, e quindi la successione, tendono a zero.

Quando detto ci permette di enunciare il teorema di **banalità delle successioni vettoriali**.

Sia  $\{\mathbf{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a}_k = (a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$ ,  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Allora:

$$\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l} \Leftrightarrow a_{k_i} \rightarrow l_i.$$

Da questo si deduce che continuano a valere i teoremi visti per le successioni in  $\mathbb{R}$  che ora prenderanno il nome di: teorema di unicità del limite, del limite di una somma di successioni vettoriali, del limite del prodotto di successione vettoriale per successione ‘scalare’, ecc. L’ultimo citato, può essere sintetizzato come segue.

Siano  $\{\mathbf{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $\mathbb{R}$  tali che  $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha_k \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ . Allora:

$$\alpha_k \cdot \mathbf{a}_k \rightarrow \lambda \cdot \mathbf{l}$$

□

Enunciamo ora una serie di teoremi sulle successioni in  $\mathbb{R}^n$ , seguiti, ove possibile, dalla loro dimostrazione.

Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $A$ ,  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{l} \in \bar{A}$$

Si dimostra ragionando per assurdo e considerando, cioè,  $\mathbf{l} \notin \bar{A}$  e quindi  $\mathbf{l} \in \text{int } A'$ . Si avrebbe quindi che:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(\mathbf{l}) \subseteq A'$$

Ma ciò non è possibile perché:

$$\exists \bar{k} \in \mathbb{N} : k > \bar{k} \Rightarrow \mathbf{x}_k \in B_r(\mathbf{l})$$

□

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $A$  è chiuso  $\Leftrightarrow \forall \{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $A$ , si ha che:  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{l} \in A$

La relazione “ $A$  è chiuso  $\Rightarrow \dots$ ” si dimostra con quando dimostrato per il teorema precedente. La relazione inversa (“ $A$  è chiuso  $\Leftarrow \dots$ ”) si dimostra ancora una volta per assurdo. Se  $A$  non fosse chiuso si avrebbe che:

$$\exists \mathbf{y} \in \text{Fr}(A) - A$$

Ma ciò non è possibile perché in contrasto con quanto detto sopra.

□

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora:

$$\mathbf{c} \in \text{Fr}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ successione in } A : \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{c} \\ \exists \{\mathbf{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ successione in } A' : \mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{c} \end{cases}$$

Dimostriamo la relazione da sinistra a destra ( $\Leftarrow$ ).

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \exists k_r, h_r \in \mathbb{N} : \mathbf{x}_{k_r} \in B_r(\mathbf{c}), \mathbf{y}_{h_r} \in B_r(\mathbf{c})$$

Quindi in  $B_r(\mathbf{c})$  ci sono sia punti di  $A$  che punti di  $A'$  e ciò avviene solo per le palle di centro un punto di frontiera. La relazione opposta ( $\Rightarrow$ ) si dimostra osservando che se  $\mathbf{c} \in \text{Fr}(A)$ , in ogni intorno di  $\mathbf{c}$  vi saranno sia punti di  $A$  che punti di  $A'$ ; possiamo quindi creare una successione di palle il cui raggio tenda a zero e in modo che in ognuna di essa vi siano punti sia di  $A$  che di  $A'$ :

$$\left\{ B_{\frac{1}{k}}(\mathbf{c}) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow \exists \mathbf{x}_k \in A \cap B_{\frac{1}{k}}(\mathbf{c}), \exists \mathbf{y}_k \in A' \cap B_{\frac{1}{k}}(\mathbf{c})$$

Le due successioni  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{y}_k$  si possono maggiorare nel seguente modo:

$$0 \leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{c}| \leq \frac{1}{k}, \quad 0 \leq |\mathbf{y}_k - \mathbf{c}| \leq \frac{1}{k}$$

e per il teorema del confronto  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{c}$  e  $\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{c}$ .



## 4.6 Continuità delle funzioni di più variabili

Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Chiamiamo *insieme di livello*  $c$  della funzione  $f$  l'insieme così definito:

$$f_c = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\}$$

Si noti che  $c \notin A \Rightarrow f_c = \emptyset$ .

□

Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $f$  è **continua** in  $\mathbf{c}$  quando qualsiasi sia  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione in  $A$  che converga in  $\mathbf{c}$  ( $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{c}$ ), si ha  $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f(\mathbf{c})$ .

□

Prima dell'enunciato del prossimo teorema, occorre ricordare come anche le funzioni da  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  ( $m > 1$ ) si possano scomporre, così come le successioni, nelle funzioni componenti  $(f_1(x), \dots, f_m(x))$  da  $A$  a  $\mathbb{R}$ . Il teorema che segue può essere considerato un **teorema di banalità** per le funzioni di più variabili.

Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $\mathbf{c} \in A$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Allora la funzione  $\mathbf{f}$  è continua in  $\mathbf{c}$  se e solo se  $f_i$  è continua in  $\mathbf{c}$ .

□

Segue un secondo teorema di continuità.

Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in A$ . Allora la funzione  $\mathbf{f}$  è continua in  $\mathbf{c}$  se e solo se si verifica che:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \mathbf{x} \in A \cap B_{\delta_\varepsilon}(\mathbf{c}) \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})| \leq \varepsilon \text{ (ossia: } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \overline{B_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{c}))})$$

□

Segue un teorema sulle funzioni continue.

Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c} \in A$ , con  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, g$  continue in  $\mathbf{c}$ . Allora:

- I)  $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$  è continua in  $\mathbf{c}$
- II)  $g \cdot \mathbf{f}_2$  è continua in  $\mathbf{c}$
- III)  $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2$  è continua in  $\mathbf{c}$

Gli enunciati si dimostrano facilmente attraverso le definizioni.

## 4.7 Proprietà topologiche delle funzioni continue

La generalizzazione del **teorema di Weierstrass** per le funzioni di più variabili è la seguente.

Siano  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua. Allora esistono  $\max f$  e  $\min f$ .

Di più, siano  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto,  $\mathbf{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Allora  $\mathbf{f}(K)$  è compatto.

Si ricorda che un dominio chiuso non implica un'immagine chiusa, tuttavia un dominio compatto implica un'immagine compatta.

Un insieme  $E$  compatto, possiede massimo e minimo. Infatti, il suo estremo superiore, che può essere considerato come limite di una successione in  $E$ , appartiene per forza ad  $E$ , poiché esso è, per ipotesi, chiuso. □

Ricordiamo la definizione di intervallo.

Dato  $I \subseteq \mathbb{R}$ , diciamo che  $I$  è **intervallo** quando  $\forall a, b \in I$ , con  $a < b$ , si ha che:

$$\{x \subseteq \mathbb{R} : a < x < b\} \subseteq I.$$

La definizione di intervallo può essere data anche nel modo che segue.

Dato  $I \subseteq \mathbb{R}$ , diciamo che  $I$  è **intervallo** quando  $\forall a, b \in I$ , con  $a < b$ ,  $\exists g : [0, 1] \rightarrow I$  continua, tale che  $g(0) = a$  e  $g(1) = b$ .

Estendiamo ora il concetto di intervallo quando si opera in dimensione maggiore.

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ . Diciamo che  $A$  è **connesso** quando  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ ,  $\exists \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow A$  continua, tale che  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$  e  $\mathbf{g}(1) = \mathbf{b}$ . □

Il **teorema dei valori intermedi** visto per le funzioni di una variabile reale può essere così generalizzato per funzioni di più variabili.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{f} : \mathcal{C}(A; \mathbb{R}^m)$ . Vale la seguente relazione:

$$A \text{ connesso} \Rightarrow \mathbf{f}(A) \text{ connesso}$$

Dimostrazione. Siano  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{f}(A)$ ,  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ ,  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\mathbf{x}_i \in A$ . Allora:

$$\exists \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow A : \mathbf{g} \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}^n), \mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_1, \mathbf{g}(1) = \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{f}(A), (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(0) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(0)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1, (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(1) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(1)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$$

Essendo  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  ancora continua perché composizione di funzioni continue, il teorema è dimostrato. □

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{h} : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{g}(A) \subseteq B$ ,  $\mathbf{c} \in A$ ,  $\mathbf{g}$  continua in  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{h}$  continua in  $\mathbf{g}(\mathbf{c})$ . Allora  $\mathbf{h} \circ \mathbf{g}$  è continua in  $\mathbf{c}$ .

Il teorema è presto dimostrato considerando  $\mathbf{c}$  come il limite a cui tende una generica successione in  $A$ . □

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ . Un insieme di livello per la funzione  $\mathbf{f}$  può essere pensato, oltre a come è stato definito precedentemente, anche come  $\{\mathbf{x} \in A : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in E\} \subseteq A$ , dove  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  rappresenta non solo un valore, ma un insieme di valori appartenenti a  $\mathbb{R}^m$ . Definiamo quindi **controimmagine** di  $E$  attraverso  $\mathbf{f}$  l'insieme:

$$\mathbf{f}^{-1}(E) = \{\mathbf{x} \in A : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in E\}$$

□

Siano  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  chiuso,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(K; \mathbb{R}^m)$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $E$  chiuso. Allora  $\mathbf{f}^{-1}(E)$  è chiusa. Si ricordi che non vale il contrario.

### 4.8 Limite delle funzioni di più variabili

Prima di definire il limite di funzione di più variabili, è necessario fornire la seguente definizione.

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $\mathbf{c}$  è **punto di accumulazione** per  $A$  se:

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, B_r(\mathbf{c}) \cap A - \{\mathbf{c}\} \neq \emptyset$$

Valgono quindi le seguenti considerazioni:

$$\mathbf{c} \in \text{int}(A) \Rightarrow \mathbf{c} \text{ è punto di accumulazione per } A$$

$$\mathbf{c} \in \text{Fr}(A) - A \Rightarrow \mathbf{c} \text{ è punto di accumulazione per } A$$

$$\mathbf{c} \in A \cap \text{Fr}(A) \Rightarrow \text{nulla si può dire di } \mathbf{c}$$

$$\mathbf{c} \in \text{int}(A') \Rightarrow \mathbf{c} \text{ non è punto di accumulazione per } A$$

□

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}$  punto di accumulazione per  $A$ . Diciamo che esiste

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

quando per ogni successione  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $A - \{\mathbf{c}\}$  tale che  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{c}$ , si ha che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbf{l}$$

Analogamente al caso unidimensionale, vale il teorema di unicità del limite, vale inoltre il teorema di banalità delle funzioni vettoriali (analogo a quello delle successioni) e il seguente teorema sull'algebra dei limiti.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{l}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{p}$ ,  $h(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} s$ . Allora:

I)  $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{l} + \mathbf{p}$

II)  $(h \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} s \cdot \mathbf{l}$

III)  $\forall \mathbf{x} \in A, h(\mathbf{x}) \neq 0, s \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{h(\mathbf{x})} \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \frac{1}{s}$

IV)  $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{l} \cdot \mathbf{p}$  (prodotto scalare)

□

Possiamo ora ridefinire la continuità di una funzione in un punto.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in A$ ,  $\mathbf{c}$  punto di accumulazione per  $A$ . Diciamo che  $\mathbf{f}$  è **continua** in  $\mathbf{c}$  se e solo se si verifica che:

$$\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{c})$$

□

Presentiamo ora un teorema utile per il calcolo dei limiti di funzioni di più variabili.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset A$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}$  punto di accumulazione per  $B$ .

Allora:

$$\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \Rightarrow \exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}|_B(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

Di più, se esiste  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}|_B(\mathbf{x})$  allora il limite  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  o non esiste oppure è uguale a  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}|_B(\mathbf{x})$ .

Si dimostra facilmente a partire dalla definizione di limite.

□

La definizione di limite fornita attraverso le successioni può essere vista come una definizione ‘dinamica’ (in riferimento alla successione) di limite che si differenzia dalla definizione ‘statica’ che forniamo di seguito.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ . Diciamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists r_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbf{x} \in A \cap \overline{B_{r_\varepsilon}(\mathbf{c})} - \{\mathbf{c}\}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{l})$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists r_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbf{x} \in A - \{\mathbf{c}\}, |\mathbf{x} - \mathbf{c}| \leq r_\varepsilon, |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}| \leq \varepsilon$$

## 5. CALCOLO DIFFERENZIALE

### 5.1 Derivate parziali

Ci concentriamo ora su concetto di derivata per una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Per semplicità, consideriamo  $n = 2$  e  $m = 1$  e una funzione del tipo  $f(x, y)$ . Poniamo, inoltre,  $A = \mathbb{R}^n$ .

Diciamo che  $f$  è **parzialmente derivabile rispetto a  $x$**  nel punto  $(c_1, c_2)$  quando la funzione  $h_{c_2}(x) = f(x, c_2)$  è derivabile in  $c_1$ , cioè  $\exists \lim_{x \rightarrow c_1} \frac{f(x, c_2) - f(c_1, c_2)}{x - c_1} \in \mathbb{R}$ . Perciò:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, c_2) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c_1 + h, c_2) - f(c_1, c_2)}{h}$$

Diciamo che  $f$  è **parzialmente derivabile rispetto a  $y$**  nel punto  $(c_1, c_2)$  quando la funzione  $k_{c_1}(y) = f(c_1, y)$  è derivabile in  $c_2$ , cioè  $\exists \lim_{y \rightarrow c_2} \frac{f(c_1, y) - f(c_1, c_2)}{y - c_2} \in \mathbb{R}$ . Perciò:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c_1, c_2) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(c_1, c_2 + k) - f(c_1, c_2)}{k}$$

Le derivate parziali rispetto a  $x$  nel punto  $(c_1, c_2)$  si indicano quindi con  $\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, c_2)$ ,  $f'_x(c_1, c_2)$ ,  $D_1 f(c_1, c_2)$ . Le derivate parziali rispetto a  $y$  nel punto  $(c_1, c_2)$  si indicano invece con  $\frac{\partial f}{\partial y}(c_1, c_2)$ ,  $f'_y(c_1, c_2)$ ,  $D_2 f(c_1, c_2)$ .

Diversamente dalle derivate, le derivate parziali non implicano la continuità.

Inoltre, una funzione  $f$  di più variabili si dice **derivabile** in un punto del suo dominio se in quel punto esistono tutte le sue derivate parziali (BPS – *Matematica*, cap. 10, def. 4.2).

### 5.2 Differenziabilità

Analizziamo la proprietà fondamentale della retta tangente ad una funzione nel caso unidimensionale:

$$\begin{aligned} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &= f'(c) + o(1) && \text{per } h \rightarrow 0 \\ f(c+h) - f(c) &= f'(c)h + o(h) && \text{per } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Nel caso di dimensione maggiore, si ha il concetto analogo di *differenziabilità in più variabili*, che illustriamo di seguito.

Presi  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(h, k) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , consideriamo:

$$f(c_1 + h, c_2 + k) - f(c_1, c_2) = f(c_1 + h, c_2 + k) - f(c_1 + h, c_2) + f(c_1 + h, c_2) - f(c_1, c_2)$$

immaginando di scomporre l'incremento della funzione lungo i due assi cartesiani. Da qui, è possibile dimostrare (cfr. BPS - *Matematica*, cap. 10, par. 4.3 come ausilio) l'esistenza della trasformazione lineare  $T$  oggetto del prossimo teorema.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(c_1, c_2) \in \text{int}(A)$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora:

$$\forall (x, y) \in A, \exists \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) : \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ continue in } (c_1, c_2)$$

↓

$$\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) : f(c_1 + h, c_2 + k) - f(c_1, c_2) = T(h, k) + o(|h, k|) \quad \text{per } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

Di più

$$T(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, c_2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(c_1, c_2)k$$

dove  $T(h, k)$  è chiamato **differenziale** di  $f$  in  $(c_1, c_2)$ .

□

Enunciamo ora la definizione di differenziabilità.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $f$  è **differenziabile** nel punto  $\mathbf{c}$  quando:

$$\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) : f(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{c}) = T(\mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Ossia:

$$T(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}) h_i$$

Si noti che il differenziale di una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  nel punto  $\mathbf{c}$  (anche indicato con  $df_{\mathbf{c}}$ ) è una funzione che ha dominio  $\mathbb{R}^n$  e non  $A$  ( $df_{\mathbf{c}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ).

### 5.3 Gradiente e derivate direzionali

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  differenziabile in  $\mathbf{c}$ . Chiamiamo **gradiente** di  $f$  nel punto  $\mathbf{c}$  il vettore di  $\mathbb{R}^n$  che ha come componenti:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \right)$$

e lo indichiamo con  $\text{grad } f(\mathbf{c})$  o  $\nabla f(\mathbf{c})$ .

□

Le derivate parziali, studiano gli incrementi delle variabili lungo gli assi. Volendo misurarli in direzioni diverse da quelle degli assi, è opportuno introdurre le **derivate direzionali**. Preso infatti un versore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  diretto a piacere sul piano cartesiano e un numero  $t \in \mathbb{R}$  possiamo identificare ogni punto sulla retta di direzione definita da  $\mathbf{v}$ . (Pensiamo al vettore  $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ ). Possiamo studiare quindi la derivata direzionale lungo  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(c_1, c_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((c_1, c_2) + t\mathbf{v}) - f(c_1, c_2)}{t}$$

Questo ci permette di enunciare il prossimo teorema contenente la **formula del gradiente**.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  differenziabile in  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\mathbf{v}| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Allora:

$$\frac{f(\mathbf{c} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{c})}{t} = \frac{1}{t}(\nabla f(\mathbf{c}) \cdot (t\mathbf{v}) + o(t)) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + o(1) \quad \text{per } t \rightarrow 0^+$$

↓

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{c}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v}$$

### 5.4 Differenziabilità per funzioni a valori vettoriali e matrice jacobiana

Per la differenziabilità di funzioni da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  con  $m > 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ricordiamo che:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{c}) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{c}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\mathbf{c}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{c}) \right)$$

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Diciamo che  $\mathbf{f}$  è **differenziabile** nel punto  $\mathbf{c}$  quando:

$$\exists \mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) : \mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}(\mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

□

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Diciamo che  $\mathbf{f}$  è una **funzione di classe  $\mathcal{C}^{(1)}$** , e scriviamo  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(A; \mathbb{R}^m)$ , quando:

- a)  $\mathbf{f}$  è continua ( $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R}^m)$ );
- b)  $\exists \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in A$ ;
- c)  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$  è continua.

□

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ ,  $\mathbf{f}$  differenziabile in  $\mathbf{c}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{e}_i$  elemento  $i$ -esimo della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Allora:

- I)  $\mathbf{f}$  è continua in  $\mathbf{c}$
- II)  $\exists \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i)$
- III)  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{v}| = 1, \exists \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{c})$

Il punto I) si dimostra a partire dalla definizione di differenziale. Il punto II) si dimostra a partire dal rapporto incrementale  $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{c} + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{t}$ , con  $t \in \mathbb{R}^+$ . Analogamente, il punto III) si dimostra a partire da  $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{c} + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{t}$ .

La trasformazione lineare  $\mathbf{T}$  sarà chiamata **differenziale** di  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{c}$ .  $d\mathbf{f}_{\mathbf{c}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ .

□

Consideriamo ora la funzione  $\mathbf{f}$ , il punto  $\mathbf{c}$  e l'incremento  $\mathbf{h}$  di  $\mathbb{R}^n$  come vettori delle loro componenti. Questo ci permette introdurre una forma matriciale che ci consente di esprimere il concetto di differenziabilità per funzioni a valori vettoriali in forma più compatta.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ . Chiamiamo **matrice jacobiana** di  $\mathbf{f}$  nel punto  $\mathbf{c}$  la matrice associata (rispetto alle basi canoniche) di  $d\mathbf{f}_{\mathbf{c}}$ :

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \end{pmatrix}$$

Studiamo la composizione della matrice jacobiana. Innanzitutto ha  $m$  righe e  $n$  colonne. Ha per righe i gradienti delle componenti di  $\mathbf{f}$  (calcolati nel punto  $\mathbf{c}$ ):

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{c}) \\ \nabla f_2(\mathbf{c}) \\ \vdots \\ \nabla f_i(\mathbf{c}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{c}) \end{pmatrix}$$

Per colonne ha invece le derivate parziali di  $\mathbf{f}$  rispetto alla variabile  $j$ -esima:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \end{pmatrix}$$

□

Consideriamo adesso il differenziale della funzione:

$$d\mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = (df_{1,\mathbf{c}}(\mathbf{h}), df_{2,\mathbf{c}}(\mathbf{h}), \dots, df_{i,\mathbf{c}}(\mathbf{h}), \dots, df_{m,\mathbf{c}}(\mathbf{h}))$$

$$df_{i,\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \nabla f_i(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{j=1}^n df_{i,\mathbf{c}}(\mathbf{e}_j) h_j$$

Possiamo quindi concludere che:

$$d\mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) = \mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{h}$$

$\begin{matrix} m \times 1 & m \times n & n \times 1 \end{matrix}$



### 5.5 Calcolo di differenziali

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ ,  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, h$  differenziabili in  $\mathbf{c}$ . Allora:

- I)  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  è differenziabile in  $\mathbf{c}$  e  $d(\mathbf{f} + \mathbf{g})_{\mathbf{c}} = d\mathbf{f}_{\mathbf{c}} + d\mathbf{g}_{\mathbf{c}}$
- II)  $h \cdot \mathbf{f}$  è differenziabile in  $\mathbf{c}$  e  $d(h \cdot \mathbf{f})_{\mathbf{c}} = dh_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}) + h(\mathbf{c}) \cdot d\mathbf{f}_{\mathbf{c}}$
- III)  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$  è differenziabile in  $\mathbf{c}$  e  $d(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})_{\mathbf{c}} = d\mathbf{f}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{c}) + \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot d\mathbf{g}_{\mathbf{c}}$

Le affermazioni si dimostrano facilmente a partire dalla definizione di differenziale.

□

Segue un teorema sul differenziale di funzione composte.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{f}(A) \subseteq B$ ,  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{c}) \in \text{int}(B)$ ,  $\mathbf{f}$  differenziabile in  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}$  differenziabile in  $\mathbf{f}(\mathbf{c})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Allora:

- I)  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  è differenziabile in  $\mathbf{c}$
- II)  $d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_{\mathbf{c}} = d\mathbf{g}_{\mathbf{f}(\mathbf{c})} \circ d\mathbf{f}_{\mathbf{c}}$
- III)  $\mathcal{J}_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{c}) = \mathcal{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \cdot \mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{c})$
- IV)  $\frac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_k}{\partial x_i}(\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{c})$

Il teorema si dimostra scrivendo, innanzitutto, il differenziale della funzione composta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{c}) &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})) - \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) = \\ &= d\mathbf{g}_{\mathbf{f}(\mathbf{c})}(\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})) + o(\|\mathbf{f}(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})\|) = \\ &= d\mathbf{g}_{\mathbf{f}(\mathbf{c})}(d\mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|)) + o(\|d\mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|)\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

Semplificando ulteriormente, sarà poi sufficiente dimostrare la trascurabilità degli  $o$  piccoli.

Se  $n = 1$  e  $p = 1$  e quindi  $f$  è una funzione da  $I(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g$  è una funzione da  $B(\subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(I) \subseteq B$ , l'asserto IV) può essere riscritto come segue:

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(c) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{f}(c)) f'_k(c) = \nabla g(\mathbf{f}(c)) \cdot \mathbf{f}'(c)$$

dove  $\cdot$  rappresenta un prodotto scalare fra vettori.

□

Nello studio di funzioni reali di più variabili reali, si enuncia il seguente **teorema di Lagrange**.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$  tali che  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq \text{int}(A)$  (dove  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$  rappresenta il segmento di estremi  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ),  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\text{int}(A); \mathbb{R})$ . Allora:

$$\exists \mathbf{d} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] : f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) = \nabla f(\mathbf{d}) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

La dimostrazione si svolge nei seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
 g &: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\
 g(t) &= f(\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \\
 \mathbf{k}(t) &= \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\
 \mathbf{k}(0) &= \mathbf{x}_1, \mathbf{k}(1) = \mathbf{x}_2, \mathbf{k}([0,1]) = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \mathbf{k}'(t) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, g = f \circ \mathbf{k} \\
 g'(t) &= \nabla f(\mathbf{k}(t)) \cdot \mathbf{k}'(t) = \nabla f(\mathbf{k}(t)) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)
 \end{aligned}$$

Ora, per il teorema di Lagrange per funzioni reali di una variabile reale, possiamo scrivere:

$$\exists c \in (0,1) : g(1) - g(0) = g'(c) = \nabla f(\mathbf{k}(c)) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)$$

Ciò conclude la dimostrazione.

Si ricordi che il teorema non è applicabile per funzioni a valori vettoriali. Tuttavia, per questa famiglia di funzioni è valido il seguente teorema.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ ,  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq \text{int } A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\text{int } A; \mathbb{R}^m)$ . Allora:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : |f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)| \leq M |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$$

Si dimostra mediante il teorema di Lagrange esprimendo  $|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)|$  come  $\sqrt{(f(\mathbf{x}_2))^2 - (f(\mathbf{x}_1))^2}$ .

### 5.6 Derivate parziali di ordine superiore

Consideriamo la funzione  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  e tutte le sue derivate parziali del primo ordine. Allora consideriamo anche, se esistono, le seguenti **derivate parziali di secondo ordine**:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (\mathbf{c}); \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (\mathbf{c}); \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\mathbf{c}); \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\mathbf{c})$$

Esse vengono chiamate, rispettivamente: derivata parziale seconda di  $f$  rispetto a  $x$  due volte in  $\mathbf{c}$ ; derivata parziale seconda di  $f$  rispetto a  $x$  e a  $y$  in  $\mathbf{c}$ ; derivata parziale seconda di  $f$  rispetto a  $y$  e a  $x$  in  $\mathbf{c}$ ; derivata parziale seconda di  $f$  rispetto a  $y$  due volte in  $\mathbf{c}$ . Si scriveranno come segue:

$$f''_{xx}(\mathbf{c}), D_{11}f(\mathbf{c}), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{c}); f''_{xy}(\mathbf{c}), D_{12}f(\mathbf{c}), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{c}); \text{ecc.}$$

Le derivate del tipo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  vengono chiamate derivate parziali **pure**. Quelle del tipo  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  vengono chiamate derivate parziali **miste**.

□

Le funzioni di classe  $\mathcal{C}^{(1)}$  per le quali esistono tutte le derivate seconde e queste sono continue, vengono dette funzioni di classe  $\mathcal{C}^{(2)}$ . Per questa classe di funzioni vale il seguente **teorema di Schwarz**.

Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(2)}(A; \mathbb{R})$ . Allora:

$$\forall \mathbf{c} \in A, \quad \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(\mathbf{c}) = \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(\mathbf{c})$$

Questo teorema può essere generalizzato come segue.

Siano  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ ,  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(p)}(A; \mathbb{R})$ . Allora le derivate miste in uno stesso punto di ordine minore o uguale a  $p$  che fanno intervenire le stesse variabili uno stesso numero di volte sono uguali.

## 5.7 Massimi e minimi

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $\mathbf{c}$  è punto di **minimo locale** (o **relativo**) per  $f$  quando:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbf{x} \in A \cap B_r(\mathbf{c}) \Rightarrow f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x})$$

Diciamo che  $\mathbf{c}$  è punto di **massimo locale** (o **relativo**) per  $f$  quando:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbf{x} \in A \cap B_r(\mathbf{c}) \Rightarrow f(\mathbf{c}) \geq f(\mathbf{x})$$

I punti di massimo e di minimo locale per  $f$  si chiamano **estremanti** locali per  $f$ . Il valore di una funzione in un punto di minimo locale (risp. di massimo locale) per  $f$  si chiama **minimo** per  $f$  (risp. **massimo** per  $f$ ).

□

Anche per gli estremanti di funzioni di più variabili esiste un'estensione di un teorema già visto nel caso unidimensionale: il **teorema di Fermat**.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \text{int}(A)$ . Supposto che  $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(\mathbf{c}) \subseteq A$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(B_r(\mathbf{c}); \mathbb{R})$ , con  $\mathbf{c}$  estremante locale per  $f$ , allora si ha:

$$\nabla f(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

Si riporta la dimostrazione del BPS – *Matematica*, cap. 10, teor. 6.2. Supponiamo per semplicità di scrittura  $n = 2$ . Se  $(x_0, y_0)$  è, ad esempio, punto di massimo locale per  $f$ , la funzione di una variabile  $g(t) = f(t, y_0)$  dovrà avere un punto di massimo locale in  $t = x_0$ ; perciò per il teorema di Fermat in una variabile,  $g'(x_0) = 0$ , ossia  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ . Analogamente, ragionando sulla funzione di una variabile  $h(t) = f(x_0, t)$  si prova che  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ , il che prova la tesi.

## 5.8 Formula di Taylor e matrice hessiana

Ricerchiamo, come nel caso visto per le funzioni di una variabile, un polinomio che approssimi una funzione di classe  $\mathcal{C}^{(2)}$  con una superficie tangente. Svolgiamo i calcoli prendendo una funzione di due variabili reali, per estendere poi la formula ad un caso più generale.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in \text{int}(A)$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(2)}$ ,  $t \in (0, 1)$ ,  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ,  $\|(v_1, v_2)\| = 1$ . Consideriamo un altro punto  $(x_0 + v_1, y_0 + v_2)$ . L'incremento di  $f$  avvicinandoci al punto iniziale  $(x_0, y_0)$  sarà:  $(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - (x_0, y_0)$ . Consideriamo la

funzione  $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ . Essa risulta essere di classe  $\mathcal{C}^{(2)}$  poiché composizione di due funzioni di classe  $\mathcal{C}^{(2)}$  ( $\mathbf{h}$ , funzione della sola variabile  $t$ , è addirittura di classe  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ ):

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} & g(t) &= f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \\ \mathbf{h}(t) &= (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) & &= (x_0, y_0) + t(v_1, v_2) \\ g &= f \circ \mathbf{h} \end{aligned}$$

Scriviamo ora la formula di Taylor con resto secondo Peano al secondo ordine per la funzione  $g(t)$ .

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0^+ \\ g'(t) &= \nabla f(\mathbf{h}(t)) \cdot \mathbf{h}'(t) = \nabla f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \cdot (v_1, v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left( \frac{d}{dt} \nabla f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \right) \cdot (v_1, v_2) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \cdot v_2 \right) = \\ &= \left( \nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \cdot (v_1, v_2) \right) \cdot v_1 + \left( \nabla \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \cdot (v_1, v_2) \right) \cdot v_2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) v_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) v_2 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) v_2^2 \end{aligned}$$

Possiamo ora scrivere la formula finale nel punto  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (tv_1, tv_2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) (tv_1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) (tv_1)(tv_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) (tv_2)^2 \right) \\ &\quad + o\left(\|(tv_1, tv_2)\|^2\right) \\ &\quad \text{per } t \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Si noti la semplificazione della derivata parziale del secondo ordine rispetto a  $x$  e a  $y$  in virtù del teorema di Schwarz. Per una ulteriore semplificazione del risultato, è necessario un ulteriore elemento, la matrice hessiana, definita come segue.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(A)$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(2)}(A; \mathbb{R})$ . Definiamo **matrice hessiana** la seguente matrice:

$$\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Si noti che tale matrice è simmetrica, sempre per il teorema di Schwarz.

□

È ora possibile enunciare la **formula di Taylor con resto secondo Peano** in forma del tutto generale.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(A)$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ ,  $f \in C^{(2)}(A; \mathbb{R})$ . Allora:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}(\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|^2) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Si noti che il termine  $(\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}$  è in realtà una forma quadratica. Posta  $\mathbf{A}$  la matrice hessiana  $\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)$ , possiamo scrivere:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$$

## 5.9 Forme quadratiche

La **forma quadratica** è quindi una funzione polinomiale omogenea (ossia che contiene solo termini di secondo grado)  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  per la quale valga:

- a)  $q(\mathbf{0}) = 0$ ;
- b)  $q(t\mathbf{h}) = t^2 q(\mathbf{h})$ .

Si noti che  $q(\mathbf{h})$  assume segno costante su ogni retta passante per l'origine (origine esclusa, infatti  $q(\mathbf{0}) = 0$ ).

□

Le forme quadratiche e le loro matrici associate (come  $\mathbf{A}$  nel caso precedente), assumono le seguenti denominazioni:

- 1) se  $q(\mathbf{h}) > 0, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$  si dice **definita positiva**;
- 2) se  $q(\mathbf{h}) < 0, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$  si dice **definita negativa**;
- 3) se  $q(\mathbf{h}) \geq 0, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$  si dice **semi-definita positiva**;
- 4) se  $q(\mathbf{h}) \leq 0, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$  si dice **semi-definita negativa**;
- 5) se  $\exists \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n : q(\mathbf{h}) < 0 < q(\mathbf{k})$  si dice **non definita**.

Si rimanda al BPS – *Matematica*, cap. 10, par. 6.2 per proprietà e caratteristiche ulteriori delle forme quadratiche, o al CGG – *Geometria*, Appendice B per una trattazione esaustiva.

### 5.10 Studio dei punti critici

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(A)$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A; \mathbb{R})$ . Diciamo che  $\mathbf{x}_0$  è **punto critico** per  $f$  quando:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

□

Vediamo ora come classificare i punti critici di una funzione di più variabili con il prossimo teorema

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(A)$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(2)}(A; \mathbb{R})$ ,  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  (ossia  $\mathbf{x}_0$  punto critico per  $f$ ). Allora:

- I) se  $\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)$  è definita positiva, allora  $\mathbf{x}_0$  è punto di minimo locale per  $f$
- II) se  $\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)$  è definita negativa, allora  $\mathbf{x}_0$  è punto di massimo locale per  $f$
- III) se  $\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)$  è non definita, allora  $\mathbf{x}_0$  non è estremante locale per  $f$  ed è **punto a sella** per  $f$

L'incremento della funzione  $f$  espressa secondo Taylor è:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}(\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|^2) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Ma per il teorema di Fermat il differenziale primo è nullo se supponiamo  $\mathbf{x}_0$  punto critico. Quindi possiamo riscriverlo come segue:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2}|\mathbf{h}|^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{h}|^2}(\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} + o(1) \right) = \\ &= \frac{1}{2}|\mathbf{h}|^2 \left( \mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} + o(1) \right) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

Poniamo  $q$  come la quadratica associata a  $\mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0)$ . Per il teorema di Weierstrass, la forma quadratica  $q \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$ , che ha dominio compatto ed è continua, possiede massimo e minimo, quindi sappiamo che  $\exists m = \min q \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \in \mathbb{R}$ . Se  $q$  è definita positiva, allora  $q \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} > 0, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Inoltre, per  $\mathbf{h}$  sufficientemente piccolo sappiamo anche che  $|o(1)| < \frac{m}{2}$ . Perciò si possono eseguire le seguenti maggiorazioni:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|^2 \left( \mathcal{H}_f(\mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} + o(1) \right) \geq \frac{1}{2}|\mathbf{h}|^2 \left( m - \frac{m}{2} \right) = \frac{m}{4}|\mathbf{h}|^2 > 0$$

Quindi:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{x}_0)$$

ovvero  $\mathbf{x}_0$  è punto di minimo relativo.

Per un metodo efficace per lo studio della natura dei punti critici, si invita la lettura del BPS – *Matematica*, cap. 10, teor. 6.8 e relativo par. 6.3.

## 6. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

### 6.1 Equazione differenziale

Per esprimere il concetto di equazione differenziale, si riporta la definizione fornita dal BPS – *Matematica*, cap. 7, par. 1.

Si dice **equazione differenziale di ordine  $n$**  un'equazione del tipo:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

dove  $y(t)$  è la funzione incognita, e  $F$  è una funzione assegnata delle  $n + 2$  variabili  $t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ , a valori reali. L'**ordine** dell'equazione differenziale è l'ordine massimo di derivazione che vi compare. Si dirà **soluzione**, o (**curva**) **integrale** dell'equazione differenziale  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  una funzione  $y(t)$ , definita almeno in  $I$  e a valori reali, per cui risulti:

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

Infine si dirà **integrale generale** dell'equazione differenziale  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , una formula che assegni, eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuta, tutte le soluzioni dell'equazione  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Definiamo integrale generale anche l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . L'integrale generale può essere quindi considerato spazio vettoriale di dimensione  $n$  (dove  $n$  rappresenta l'ordine dell'equazione differenziale).

### 6.2 Equazioni del primo ordine

L'equazione differenziale del primo ordine è perciò un'equazione del tipo:

$$F(t, y, y') = 0$$

Se espressa in questa forma è detta **implicita**, se invece espressa nella seguente è detta **normale**:

$$y' = f(t, y)$$

Vale la stessa definizione di integrale generale data per il caso generico nel paragrafo precedente. Evidentemente, l'insieme delle soluzioni sarà costituito da una famiglia di funzioni dipendenti da un parametro  $c$ :  $\varphi(t, c)$ .

□

All'equazione differenziale è possibile aggiungere una condizione supplementare, chiamata **condizione iniziale**, che darà luogo ad un sistema detto **problema di Cauchy**. Si ha quindi:

$$I \subseteq \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}, y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque una funzione  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C^{(1)}(I; \mathbb{R})$ , tale che:

$$\begin{cases} \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = 0 \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall t \in I$$

□

Definiamo **equazioni lineari del primo ordine** le equazioni differenziali del tipo:

$$y' + a(t)y = f(t)$$

con  $a$  e  $f$  funzioni continue sull'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Se  $f \equiv 0$  in tutto  $I$  l'equazione si dice **omogenea**, altrimenti si dirà **non omogenea** (o completa).

Date queste definizioni è opportuno svolgere due osservazioni:

- 1) la funzione  $\varphi$  identicamente nulla ( $\varphi \equiv 0$ ) è soluzione dell'equazione omogenea;
- 2) se  $u_1, u_2$  sono soluzioni dell'omogenea  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  allora anche  $c_1u_1 + c_2u_2$  è soluzione dell'omogenea.

La dimostrazione delle proprietà 2) avviene a partire dalla definizione di soluzione, sommando tra loro le due equazioni, l'una espressa in  $c_1u_1$  e l'altra in  $c_2u_2$ .

□

Prima di definire l'insieme delle soluzioni dell'omogenea, enunciamo la seguente proposizione.

L'integrale generale dell'equazione non omogenea si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea una soluzione particolare della non omogenea.

Analogamente per quanto svolto per dimostrare l'osservazione 2) al problema di Cauchy, consideriamo  $\varphi$  e  $\varphi_p$  soluzioni della non omogenea e scriviamo due equazioni lineari del primo ordine espresse rispettivamente in  $\varphi$  e  $\varphi_p$ ; calcolandone la differenza membro a membro, il teorema risulterà dimostrato. Per una dimostrazione rigorosa si rimanda al BPS - *Matematica*, cap. 7, teor. 2.1.

□

Occupiamoci ora di trovare una soluzione all'equazione omogenea.

L'insieme delle soluzioni (o integrale generale) di  $y' + a(t)y = 0$  è uno spazio vettoriale di dimensione 1 ed è espresso come:

$$\{t \mapsto ce^{-A(t)} : c \in \mathbb{R}\}$$

dove  $A(t)$  è una qualsiasi primitiva della funzione  $a$ .

Tale risultato si dimostra moltiplicando ambo i membri della lineare omogenea per  $e^{A(t)}$  e ottenendo quindi un'espressione analoga a  $(e^{A(t)}y(t))' = 0$ ; si deduce quindi che  $e^{A(t)}y(t) = c \in \mathbb{R}$ . Da qui con qualche opportuna sostituzione si dimostra la validità dell'integrale generale. Per una dimostrazione rigorosa si rimanda al BPS - *Matematica*, cap. 7, par. 2.3.

□



Ora ricerchiamo la soluzione particolare della non omogenea. Essa va cercata a partire dalla forma  $\varphi_p(t) = c(t)e^{-A(t)}$ , dove  $c(t)$  ora non è più una costante. Sostituendo l'espressione di  $\varphi_p$  nella non omogenea, derivando ove necessario e semplificando, è possibile ricavare l'espressione di  $c(t)$  che, preso  $t_0 \in I$ , è:

$$c(t) = \int_{t_0}^t f(z)e^{A(z)} dz$$

Sostituiamo l'espressione di  $c(t)$  in quella  $\varphi_p$  e andiamo a sommare il risultato alla soluzione dell'omogenea, applicando il teorema sopra enunciato per ottenere l'integrale generale della non omogenea:

$$\left\{ t \mapsto ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(z)e^{A(z)} dz : c \in \mathbb{R} \right\}$$

### 6.3 Equazioni lineari del secondo ordine

Definiamo *equazioni lineari del secondo ordine* le equazioni differenziali del tipo:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$$

con  $a, b$  e  $f$  funzioni continue sull'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Se  $f \equiv 0$  in tutto  $I$  l'equazione si dice *omogenea*, altrimenti si dirà *non omogenea* (o completa).

Anche in questo caso la soluzione dell'equazione sarà del tipo  $\varphi \in \mathcal{C}^{(2)}(I; \mathbb{R})$ , tale che:

$$\varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t) = f(t) \quad \forall t \in I$$

□

Si ripropone anche nelle equazioni del secondo ordine il problema di Cauchy che dà luogo, questa volta, al *teorema di Cauchy*.

Se  $a, b, f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ ,  $t_0 \in I$ ,  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ , il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione  $\varphi(t) \in \mathcal{C}^{(2)}(I; \mathbb{R})$ .

□

Valgono quindi le seguenti osservazioni e proposizioni:

- 1) se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono soluzioni della non omogenea, allora  $\varphi_1 - \varphi_2$  è soluzione della omogenea;
- 2)  $\varphi \equiv 0$  è soluzione della omogenea;
- 3) se  $y_0$  è una soluzione della omogenea e  $y_1$  è soluzione della non omogenea, allora  $y_0 + y_1$  è soluzione della non omogenea;
- 4) (deriva dalla 1) e dalla 3)) – l'integrale generale della non omogenea si ottiene dall'integrale della omogenea aggiungendovi una soluzione particolare della non omogenea;

5) una combinazione lineare di soluzioni della omogenea è ancora soluzione della omogenea. □

Ricordiamo, a tal proposito la definizione di lineare indipendenza.

Due soluzioni  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  si dicono **linearmente indipendenti**, se presi  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , si ha:

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Ricordiamo inoltre, che per verificare l'effettiva lineare indipendenza delle due soluzioni  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  è sufficiente, preso un punto  $t_0 \in I$ , verificare la lineare indipendenza fra i vettori  $(\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0))$  e  $(\varphi_2(t_0), \varphi_2'(t_0))$  calcolando il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

□

Analizziamo ora l'insieme delle soluzioni della lineare omogenea del secondo ordine.

Se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea in  $I$ , allora ogni altra soluzione è combinazione lineare di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . L'integrale generale è dato da:

$$\{t \mapsto c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

e risulta essere spazio vettoriale di dimensione 2.

La dimostrazione di questo teorema si basa sull'esistenza e unicità della soluzione del teorema di Cauchy sopra riportato. Sia dunque anche  $\varphi(t)$  soluzione dell'omogenea, tale che per  $t_0 \in I$ :

$$\varphi(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \varphi'(t_0) = y_1 \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) \quad \forall t \in I$$

Ci chiediamo ora se i due vettori  $(\varphi_1(t_0), \varphi_1'(t_0))$  e  $(\varphi_2(t_0), \varphi_2'(t_0))$  sono linearmente indipendenti; essi lo sono, perché, per ipotesi, le soluzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono linearmente indipendenti. Perciò possiamo scrivere:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{cases} \alpha\varphi_1(t_0) + \beta\varphi_2(t_0) = y_0 \\ \alpha\varphi_1'(t_0) + \beta\varphi_2'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Studiando separatamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

risulta che esiste una e una sola soluzione  $\varphi$  che lo verifichi. Siccome anche  $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$  ne è soluzione, per l'unicità della soluzione di tale teorema si deduce che necessariamente

$$\varphi = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$$

e ciò dimostra il teorema. Per una dimostrazione equivalente si rimanda al BPS - *Matematica*, cap. 7, teor. 3.3.

## 6.4 Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine

Data un'equazione lineare omogenea del secondo ordine generica, risulta molto complicato trovarne le soluzioni qualora i coefficienti della funzione incognita non siano delle costanti. Ci limitiamo quindi a considerare equazioni a coefficienti costanti del tipo

$$y'' + ay' + by = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Indichiamo, d'ora in poi, con  $L(y)$  il primo membro dell'equazione, quindi:

$$L(y) = y'' + ay' + by$$

□

La ricerca delle soluzioni, ha inizio considerando  $L(e^{kt})$  come primo membro e studiando se  $e^{kt}$  può essere accettata o meno come soluzione. Quindi, derivando si ottiene:

$$L(e^{kt}) = e^{kt} (k^2 + ak + b) \stackrel{?}{=} 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Essa evidentemente si verifica quando  $k$  assume il valore di una soluzione dell'**equazione caratteristica**  $k^2 + ak + b = 0$ . Occorre quindi studiarne il discriminante.

$\Delta > 0$ . Allora si ha che  $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  con  $k_1 \neq k_2$  soluzioni dell'equazione caratteristica e quindi le funzioni  $v_1 : t \mapsto e^{k_1 t}$  e  $v_2 : t \mapsto e^{k_2 t}$  sono soluzioni dell'omogenea. Si verifichi la loro lineare indipendenza a partire da  $c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} = 0$  raccogliendo  $e^{k_1 t}$ . L'integrale generale è quindi:

$$\{t \mapsto c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\Delta = 0$ . Allora si ha che  $\exists! k_1 = -\frac{a}{2} \in \mathbb{R}$  soluzione dell'equazione caratteristica e la funzione  $v_1 : t \mapsto e^{-\frac{a}{2}t}$  è soluzione dell'omogenea. Occorre, tuttavia, una seconda soluzione linearmente indipendente dalla prima; si dimostri che anche  $v_2(t) = te^{-\frac{a}{2}t}$  verifica l'equazione ricordando che  $a^2 - 4b = 0$  per ipotesi. Si verifichi, inoltre, la lineare indipendenza a partire dalla forma espressa nell'integrale generale che è quindi:

$$\{t \mapsto c_1 e^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a}{2}t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\Delta < 0$ . Allora si ha che  $\exists k_0, \bar{k}_0 \in \mathbb{C}$  soluzioni in  $\mathbb{C}$  dell'equazione caratteristica. Per verificare che la funzione da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  tale che  $t \mapsto e^{k_0 t} \in \mathbb{C}$  sia soluzione, occorre che quantomeno sia derivabile. Si rimanda al paragrafo 1.12 per la dimostrazione. Due soluzioni complesse della omogenea sono quindi le funzioni  $t \mapsto e^{k_0 t}$  e  $t \mapsto e^{\bar{k}_0 t}$ . È dunque insieme soluzioni l'integrale generale a valori in  $\mathbb{C}$ :

$$\{t \mapsto d_1 e^{k_0 t} + d_2 e^{\bar{k}_0 t} : d_1, d_2 \in \mathbb{C}\}$$

Volendo rendere l'integrale generale a valori in  $\mathbb{R}$ , si scelgano come soluzioni  $\frac{1}{2}(e^{k_0 t} + e^{\bar{k}_0 t})$  e  $\frac{1}{2i}(e^{k_0 t} - e^{\bar{k}_0 t})$  al posto di  $e^{k_0 t}$  e  $e^{\bar{k}_0 t}$  (si noti che sono una loro combinazione lineare). La verifica avviene banalmente per sostituzione. Integrale generale è quindi:

$$\left\{ t \mapsto e^{(\operatorname{Re} k_0)t} (c_1 \cos((\operatorname{Im} k_0)t) + c_2 \sin((\operatorname{Im} k_0)t)) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

La soluzione generica

$$v(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

può essere ricondotta alla forma

$$v(t) = A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma)$$

nella quale  $\alpha$  e  $\beta$  sono fissi e  $A \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  e  $\gamma \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right]$  variano. Tale forma si ottiene raccogliendo  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  (supposto  $c_1^2 + c_2^2 > 0$ ) dalla soluzione generica e applicando la relazione fondamentale goniometrica del seno con il coseno. □

Supponendo ora le funzioni  $v_1, v_2$  soluzioni dell'equazione omogenea,  $v$  soluzione nota della non omogenea e  $w$  una qualunque altra soluzione della non omogenea, si dimostra facilmente che:

$$L(w - v) = f(t) - f(t) = 0$$

$$w(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + v(t)$$

Come già evidenziato dalla proposizione 1) del paragrafo 6.3. Pertanto, l'insieme soluzioni della non omogenea si ottiene sommando all'integrale generale dell'omogenea una soluzione particolare  $\varphi$  della non omogenea:

$$\left\{ t \mapsto c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \varphi : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometricamente, la struttura algebrica dell'insieme delle soluzioni della non omogenea è uno spazio affine dell'insieme delle soluzioni della omogenea associata.

## 6.5 Ricerca di una soluzione della non omogenea del secondo ordine

Ricordiamo, innanzitutto, la forma dell'equazione lineare non omogenea del secondo ordine:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$$

Nella ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del secondo ordine, risulta indispensabile trovare uno spazio vettoriale  $\mathcal{E}$  così costituito:

$$\mathcal{E} = \left\{ f : I (\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^{(\infty)}(I; \mathbb{R}), f^{(k)} \in \mathcal{E}, \forall k \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

Inoltre, l'insieme  $\mathcal{E}$  deve naturalmente contenere il termine noto  $f(t)$  che compare nell'equazione di partenza. □

Qualora  $f(t)$  sia in realtà costituito dalla somma di  $n$  funzioni in  $t$ , ossia

$$f(t) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$$

vale il seguente teorema.

Siano  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Se  $v_1, \dots, v_n$  sono soluzioni delle  $n$  equazioni differenziali  $L(y) = f_1(t), \dots, f_n(t)$ , allora  $v_1 + \dots + v_n$  è soluzione di  $L(y) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$ .

□

La ricerca dello spazio  $\mathcal{E}$  avviene mediante il metodo di ‘somiglianza’ o dei coefficienti indeterminati. La soluzione particolare si trova successivamente con il principio d’identità dei polinomi. Si veda BPS – *Matematica*, cap. 7, par. 3.5.

## 6.6 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Si tratta di equazioni del tipo:

$$y' = h(x)k(y)$$

con  $h$  e  $k$  funzioni continue in intervalli di  $\mathbb{R}$ . Questo tipo di equazioni verranno esaminate solo assieme ad un determinato problema di Cauchy, per il quale vale il seguente teorema.

Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$ ,  $h \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ ,  $k \in \mathcal{C}^{(1)}(J; \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in \text{int}(I)$ ,  $\alpha \in \text{int}(J)$  e sia dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = h(x)k(y) \\ y(x_0) = \alpha \end{cases}$$

Allora esiste una e una sola soluzione a tale problema di Cauchy.

Per la sua risoluzione si osservi subito che se  $k(\alpha) = 0$ , allora la funzione costante  $y(x) = \alpha, \forall x \in I$  è l’unica soluzione del problema. Se poi  $\alpha = 0$ ,  $y(x) = 0, \forall x \in I$  è certamente soluzione del problema.

Se  $k(\alpha) \neq 0$ , si ha che la soluzione di classe  $\mathcal{C}^{(1)}$ , tale che  $k(y)(x) \neq 0$ , definita sicuramente in un intorno  $\text{In}I_\alpha$ , può essere riscritta nell’equazione differenziale come segue:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{k(y(t))} &= h(x) \\ \int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{k(y(t))} dt &= \int_{x_0}^x h(t) dt \\ \int_{\alpha}^{y(x)} \frac{1}{k(s)} ds &= \int_{x_0}^x h(t) dt \end{aligned}$$

Operando con il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale sull’ultima equazione è possibile ricavare la soluzione  $y(x)$  del problema di Cauchy. In seguito è indispensabile studiare il comportamento della soluzione al variare del parametro  $\alpha$  e stabilirne l’intorno valido.

Nella risoluzione dei problemi di Cauchy per le equazioni a variabili separabili del primo ordine, siamo sempre alla ricerca della cosiddetta **soluzione massimale**, ossia quella definita nell’intervallo più grande possibile.

## 7. INTEGRALI MULTIPLI

### 7.1 Integrale doppio su rettangoli

Per introdurre il concetto di integrale multiplo, consideriamo, per ora, il caso bidimensionale. Prendiamo quindi quattro numeri reali  $a, b, c, d$  con  $a < b$  e  $c < d$  e definiamo l'insieme compatto  $I = [a, b] \times [c, d]$  e la funzione  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Consideriamo per  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  ora una partizione di  $[a, b]$  in  $n$  intervallini di ampiezza  $h_n = \frac{b-a}{n}$  che chiameremo  $x_{n,i}$  con  $i = 0, \dots, n$ , Allora:

$$x_{n,i} = a + ih_n, \quad x_{n,0} = a, \quad x_{n,n} = b, \quad x_{n,i} < x_{n,i+1}$$

Si consideri una partizione analoga di  $[c, d]$  in  $m$  intervallini di ampiezza  $k_m = \frac{d-c}{m}$  che chiameremo  $y_{m,j}$  con  $j = 0, \dots, m$ , Allora:

$$y_{m,j} = c + jk_m, \quad y_{m,0} = c, \quad y_{m,m} = d, \quad y_{m,j} < y_{m,j+1}$$

Allora l'insieme  $I_{i,j}^{n,m} = [x_{n,i-1}, x_{n,i}] \times [y_{m,j-1}, y_{m,j}]$  sarà uno dei rettangolini che costituisce l'insieme  $I$  e che ha per lati gli intervallini sopra descritti. Prendiamo quindi due numeri,  $s_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$  e  $t_{m,j} \in [y_{m,j-1}, y_{m,j}]$ , allora  $(s_{n,i}, t_{m,j}) \in I_{i,j}^{n,m}$ . Scriviamo dunque la seguente somma di Cauchy-Reimann:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(s_{n,i}, t_{m,j}) h_n k_m$$

dove  $h_n k_m$  è l'area di uno dei rettangolini considerati. Per tale somma di Cauchy-Reimann vale il seguente teorema.

Siano  $I = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Allora:

- I)  $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(s_{n,i}, t_{m,j}) h_n k_m = \alpha_n$
- II)  $\forall m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(s_{n,i}, t_{m,j}) h_n k_m = \beta_m$
- III)  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n, \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} \beta_m$  e sono uguali tra loro e non dipendono dalla scelta dei punti

□

Siano  $I = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Chiamiamo **integrale doppio** di  $f$  su  $I$  il numero reale ottenuto come limite della somma di Cauchy-Reimann di  $f$  al tendere di  $m, n$ , a  $+\infty$  e lo indichiamo come segue:

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sum_{i, j=1}^{n, m} f(s_{n,i}, t_{m,j}) h_n k_m$$

## 7.2 Proprietà e teoremi degli integrali doppi su rettangoli

Per gli integrali doppi per funzioni continue definite su rettangoli chiusi valgono le proprietà di linearità, monotonia, permanenza del segno, vale la disuguaglianza triangolare. Non vale l'additività.

Vale inoltre, il seguente **teorema della media integrale**.

Siano  $I = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Allora:

$$\exists (\alpha, \beta) \in I : \iint_I f(x, y) dx dy = f(\alpha, \beta) \cdot \text{area}(I)$$

Si dimostra a partire da Weierstrass. Si ottiene, infatti che:

$$\begin{aligned} \min f \cdot \text{area}(I) &\leq \iint_I f(x, y) dx dy \leq \max f \cdot \text{area}(I) \\ \frac{\iint_I f(x, y) dx dy}{\text{area}(I)} &= f(\alpha, \beta) \in [\max f, \min f] = f(I) \end{aligned}$$

□

Ricordiamo che:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(s_{n,i}, t_{m,j}) h_n k_m \rightarrow \iint_I f(x, y) dx dy \quad \text{per } n, m \rightarrow +\infty$$

Perciò

$$\sum_{j=1}^m f(s_{n,i}, t_{m,j}) k_m \rightarrow \int_c^d f(s_{n,i}, y) dy \quad \text{per } m \rightarrow +\infty$$

Definiamo quindi

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d f(s_{n,i}, y) dy$$

Sostituendo nella prima espressione abbiamo:

$$\sum_{i=1}^n \int_c^d f(s_{n,i}, y) dy h_n = \sum_{i=1}^n \Phi(x) h_n \rightarrow \int_a^b \Phi(x) dx \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Quanto detto ci permette di enunciare il seguente **teorema di riduzione per i rettangoli**.

Siano  $I = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Allora:

I)  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  è continua

II)  $\Psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \quad \Psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  è continua

III)  $\iint_I f(x, y) dx dy = \int_a^b \Phi(x) dx = \int_c^d \Psi(y) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$

## 7.3 Insiemi trascurabili di dimensione 2

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato. Diciamo che  $E$  è **trascurabile** quando  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$  esiste  $P_\varepsilon$  plurirettangolo compatto (cioè unione finita di rettangoli con i lati paralleli agli assi che a due a due non hanno punti interni in comune) tale che:

$$E \subseteq P_\varepsilon;$$

$$\text{area}(P_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

|| Dove  $\text{area}(P_\varepsilon)$  è la somma delle aree dei rettangoli che lo formano.

Per gli insiemi di un piano, valgono le seguenti osservazioni:

- 1) i punti sono insiemi trascurabili;
- 2) i segmenti sono insiemi trascurabili;
- 3)  $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$  è un insieme trascurabile;
- 4)  $E_1, \dots, E_p$  trascurabili  $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^p E_i$  è trascurabile;
- 5)  $F \subseteq E$ ,  $E$  trascurabile  $\Rightarrow F$  è trascurabile.

□

|| Siano  $I = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  limitata,  $S(f) = \{(x, y) \in I : f \text{ è discontinua}\}$ ,  $S(f)$  trascurabile. Allora le somme di Cauchy-Reimann convergono a un unico numero reale che non dipende dalla scelta dei punti e che chiamiamo ancora integrale di  $f$ .

### 7.4 Integrali doppi su insiemi con frontiera trascurabile, area

Siano  $I = [a, b] \times [c, d]$ ,  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A \subset I$ ,  $A$  limitato,  $\text{Fr}(A)$  trascurabile,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  limitata,  $S(f)$  trascurabile,  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiamo  $\tilde{f}$  come segue:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \\ 0 & \text{se } (x, y) \in I - A \end{cases}$$

Perciò la  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata e  $S(\tilde{f}) \subseteq S(f) \cup \text{Fr}(A)$  è trascurabile.

|| Sotto le precedenti ipotesi, chiamiamo integrale doppio di  $f$  su  $A$  il numero reale:

$$\iint_A f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_I \tilde{f}(x, y) dx dy$$

□

Per gli integrali doppi definiti su insiemi limitati e con frontiera trascurabile, valgono le stesse proprietà viste per gli integrale doppi definiti su rettangoli e di più vale anche l'additività che viene illustrata di seguito.

Siano  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A_1, A_2$  limitati,  $\text{int}(A_1) \cap \text{int}(A_2) = \emptyset$ ,  $\text{Fr}(A_1), \text{Fr}(A_2)$  trascurabili,  $f : A_1 \cup A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  limitata,  $S(f)$  trascurabile. Allora  $\text{Fr}(A_1 \cup A_2) \subseteq \text{Fr}(A_1) \cup \text{Fr}(A_2)$  è trascurabile e possiamo scrivere:

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f(x, y) dx dy = \iint_{A_1} f(x, y) dx dy + \iint_{A_2} f(x, y) dx dy$$

□

|| Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $A$  limitato,  $\text{Fr}(A)$  trascurabile. Chiamiamo **area** di  $A$  il numero reale non negativo

$$\text{area}(A) = \iint_A 1 dx dy$$

□



Posto  $P$  insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$  costituito dall'unione degli insiemi rettangolari  $P_1, \dots, P_r$ , con  $r \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ , possiamo calcolarne l'area nel seguente modo:

$$\text{area}(P) = \sum_{k=1}^r \text{area}(P_k) = \sum_{k=1}^r \iint_{P_k} dx dy = \iint_{\bigcup_{k=1}^r P_k} dx dy$$

### 7.5 Insiemi semplici e teoremi di riduzione per gli integrali doppi

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ . Diciamo che  $E$  è ***y-sempllice*** quando:

$$\begin{aligned} \exists g_1, g_2 \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}), g_1(x) \leq g_2(x) \quad \forall x \in [a, b], \\ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \end{aligned}$$

Si noti che se un insieme  $E$  è  $y$ -semplice, allora  $E$  è anche compatto e perciò la sua frontiera è trascurabile. □

Vale quindi il seguente ***teorema di riduzione per gli insiemi y-sempllici***.

Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $E$   $y$ -semplice,  $f \in \mathcal{C}(E; \mathbb{R})$ . Allora:

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

□

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^2$ . Diciamo che  $K$  è ***x-sempllice*** quando:

$$\begin{aligned} \exists h_1, h_2 \in \mathcal{C}([c, d]; \mathbb{R}), h_1(y) \leq h_2(y) \quad \forall y \in [c, d], \\ K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \end{aligned}$$

Si noti che se un insieme  $K$  è  $x$ -semplice, allora  $K$  è anche compatto e perciò la sua frontiera è trascurabile. □

Vale quindi il seguente ***teorema di riduzione per gli insiemi x-sempllici***.

Siano  $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $K$   $x$ -semplice,  $f \in \mathcal{C}(K; \mathbb{R})$ . Allora:

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

### 7.6 Integrali tripli su parallelepipedi rettangoli

Quanto detto per gli integrali doppi, si può estendere agli integrali tripli, apportando le dovute correzioni. Innanzitutto, gli insiemi di integrazioni sono di dimensione 3, così come le funzioni da integrare sono funzioni di 3 variabili. Definiamo quindi quando un insieme si può considerare di volume nullo e quindi trascurabile.

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  limitato. Diciamo che ha volume nullo (e che quindi è trascurabile) quando  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , esistono  $P_1, \dots, P_q$  parallelepipedi rettangoli, tali che:

a)  $E \subseteq \bigcup_{k=1}^q P_k$  ;

b)  $\sum_{k=1}^q \text{vol}(P_k) \leq \varepsilon.$

Per gli insiemi nello spazio, valgono le seguenti osservazioni:

- 1) Insiemi di punti hanno volume nullo;
- 2) insiemi piani e limitati hanno volume nullo;
- 3) la funzione  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $K$  è un compatto di  $\mathbb{R}^2$  e  $g$  è continua, ha volume nullo (ad esempio la funzione:  $g_{ss} : \overline{B_r(\mathbf{0})} \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$  che rappresenta una semisfera).

□

Quindi possiamo definire un generico parallelepipedo rettangolo  $I = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$ , in modo analogo al caso bidimensionale e suddividere ogni lato rispettivamente in  $l, m, n$  intervalli. Abbiamo quindi:

$$p_l = \frac{b-a}{l}, \quad q_m = \frac{d-c}{m}, \quad s_n = \frac{k-h}{n}$$

$$x_{l,i} = a + ip_l, \quad y_{m,j} = c + jq_m, \quad z_{n,r} = h + rs_n$$

$$i = 0, \dots, l, \quad j = 0, \dots, m, \quad r = 0, \dots, n$$

$$\mathbf{c}_{i,j,r} = (x_{l,i}, y_{m,j}, z_{n,r}) \in I_{i,j,r}^{l,m,n} = [x_{l,i-1}, x_{l,i}] \times [y_{m,j-1}, y_{m,j}] \times [z_{n,r-1}, z_{n,r}]$$

Con le stesse proprietà viste per il caso precedente.

Riprendiamo la somma di Cauchy-Reimann e il relativo teorema che continua a valere anche per gli integrali tripli.

Siano  $I = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Allora la somma di Cauchy-Reimann

$$\sum_{i,j,r=1}^{l,m,n} f(\mathbf{c}_{i,j,r}) p_l q_m s_n$$

converge per  $l, m, n \rightarrow +\infty$  ad un numero reale che non dipende dalla scelta dei punti e che chiameremo **integrale triplo** di  $f$  e lo indicheremo col simbolo:

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{l,m,n \rightarrow +\infty} \sum_{i,j,r=1}^{l,m,n} f(\mathbf{c}_{i,j,r}) p_l q_m s_n$$

### 7.7 Proprietà e teoremi degli integrali tripli, volume

Nel caso di integrali tripli definiti su parallelepipedo rettangoli, vale il seguente **teorema di riduzione per i parallelepipedo**.

Siano  $I = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$ ,  $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ . Allora:

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left( \int_h^k f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_h^k \left( \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Analoghe formule sostituendo  $z$  con  $x$  oppure con  $y$ .

□

In analogia con il caso degli integrali doppi, il teorema di riduzione vale anche per funzioni non continue, purché l'insieme dei suoi punti di discontinuità abbia volume nullo.

Siano  $I = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  limitata,  $S(f)$  trascurabile. Allora:

- I)  $\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left( \int_h^k f(x, y, z) dz \right) dx dy$ , purché gli integrali ripetuti esistano
- II)  $\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \int_h^k \left( \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y, z) dx dy \right) dz$ , purché gli integrali ripetuti esistano

Analoghe considerazioni sostituendo  $z$  con  $x$  oppure con  $y$ . □

Siano  $I = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ ,  $E \subset I$ ,  $E$  limitato,  $\text{Fr}(E)$  trascurabile,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  limitata,  $S(f)$  trascurabile,  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiamo  $\tilde{f}$  come segue:

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in E \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \in I - E \end{cases}$$

Perciò la  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata e  $S(\tilde{f}) \subseteq S(f) \cup \text{Fr}(E)$  è trascurabile.

Sotto le precedenti ipotesi, chiamiamo integrale triplo di  $f$  su  $E$  il numero reale:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_I \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

□

Gli integrali tripli così definiti godono delle proprietà di linearità, monotonia, vale la disuguaglianza triangolare e l'additività che illustriamo di seguito.

Siano  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^3$ ,  $A_1, A_2$  limitati,  $\text{int}(A_1) \cap \text{int}(A_2) = \emptyset$ ,  $\text{Fr}(A_1), \text{Fr}(A_2)$  trascurabili,  $f : A_1 \cup A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  limitata,  $S(f)$  trascurabile. Allora  $\text{Fr}(A_1 \cup A_2) \subseteq \text{Fr}(A_1) \cup \text{Fr}(A_2)$  è trascurabile e possiamo scrivere:

$$\iiint_{A_1 \cup A_2} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{A_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{A_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

□

Vale, anche nel caso degli integrali tripli, il **teorema della media**.

Siano  $E \subset \mathbb{R}^3$ ,  $E$  limitato,  $\text{Fr}(E)$  trascurabile,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  limitata,  $S(f)$  trascurabile. Allora:

$$\exists w \in [\inf f, \sup f] : \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = w \cdot \text{vol}(E)$$

□

Siano  $E \subset \mathbb{R}^3$ ,  $E$  limitato,  $\text{Fr}(E)$  trascurabile. Chiamiamo **volume** di  $E$  il numero reale non negativo

$$\text{vol}(E) = \iiint_E 1 dx dy dz$$

## 7.8 Insiemi semplici e teoremi di riduzione per integrali tripli

Sia  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Diciamo che  $E$  è ***x-sempllice*** quando:

$$\exists B \subset \mathbb{R}^2, B \text{ semplice}, \exists g_1, g_2 \in \mathcal{C}(B; \mathbb{R}) : g_1(y, z) \leq g_2(y, z) \quad \forall (y, z) \in B$$

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in B, g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z) \right\}$$

□

Quando un insieme è  $x$ -semplice, si può applicare il **teorema di riduzione per fili**.

Siano  $E \subset \mathbb{R}^3$ ,  $E$   $x$ -semplice,  $f \in \mathcal{C}(E; \mathbb{R})$ . Allora:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left( \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz$$

□

Sia  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Diciamo che  $E$  è  $E_x$ -semplice quando:

$$\forall x \in [a, b], \exists E_x \subset \mathbb{R}^2 : E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], (y, z) \in E_x \right\}$$

□

Quando un insieme è  $E_x$ -semplice, si può applicare il **teorema di riduzione per strati**.

Siano  $E \subset \mathbb{R}^3$ ,  $E$   $E_x$ -semplice,  $f \in \mathcal{C}(E; \mathbb{R})$ . Allora:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{E_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx$$

## 7.9 Cambiamento di variabili negli integrali doppi, coordinate polari

Siano  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A \subset E$ ,  $A$  limitato,  $\text{Fr}(A)$  trascurabile,  $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(1)}(E; \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathbf{g}(A)$  limitata,  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{g}(A); \mathbb{R})$ ,  $f$  limitata. Allora possiamo scrivere la seguente approssimazione:

$$\iint_{\mathbf{g}(A)} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,j=1}^p f(c_i, d_j) \text{area}(K_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^p f(\mathbf{g}(\alpha_i, \beta_j)) \text{area}(\mathbf{g}(Q_{i,j}))$$

dove  $(c_i, d_j) = \mathbf{g}(\alpha_i, \beta_j)$  e  $K_{i,j} = \mathbf{g}(Q_{i,j})$  con  $Q_{i,j} \subset A$ .

Nell'operazione cambiamento di variabile per gli integrali semplici, era necessario cambiare opportunamente gli estremi di integrazione dell'integrale di partenza. In modo analogo, anche per gli integrali doppi, non è sufficiente cambiare a piacimento la funzione integranda, ma occorre definire un nuovo insieme d'integrazione, legato a quello di partenza possibilmente attraverso una trasformazione lineare  $\mathbf{T}$  da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ . Pertanto, poniamo  $E$  limitato,  $\text{area}(\text{Fr}(E)) = 0$  e  $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ . Supponendo che  $E$  sia definito (in modo semplificato)  $E = [0, a] \times [0, b]$ , cosa riusciamo a dire su  $\mathbf{T}(E)$ ? Tutti i punti appartenenti a  $\mathbf{T}(E)$  avranno la seguente forma:

$$\mathbf{T}(c_1(a, 0) + c_2(0, b)) = c_1 \mathbf{T}(a, 0) + c_2 \mathbf{T}(0, b)$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Calcolando l'area dell'insieme trasformato risulta che:

$$\text{area}(\mathbf{T}([0, a] \times [0, b])) = \text{area}([0, a] \times [0, b]) \cdot |\det \mathbf{T}|$$

(per la semplificazione del  $\cos^2$  si sfrutti la definizione geometrica vettoriale del coseno: CGG - *Geometria*, Def. 8.4).

Abbiamo sinora supposto che la funzione che trasforma l'insieme d'integrazione fosse una trasformazione lineare. Ma  $\mathbf{g}$  è realmente una trasformazione lineare? No, tuttavia è di classe  $\mathcal{C}^{(1)}$  e può quindi essere ridefinita come segue:

$$\mathbf{g}(u, v) = \mathbf{g}(\alpha_i, \beta_j) + d\mathbf{g}_{(\alpha_i, \beta_j)}(u - \alpha_i, v - \beta_j) + o(1)$$

dove  $\mathbf{g}(\alpha_i, \beta_j)$  è una costante di traslazione,  $d\mathbf{g}_{(\alpha_i, \beta_j)}(u - \alpha_i, v - \beta_j)$  una trasformazione lineare (in quanto è il differenziale di  $\mathbf{g}$ ) e  $o(1)$  una quantità trascurabile.

Quando vale quindi  $|\det \mathbf{T}|$ ? Possiamo concludere che si approssimi con il modulo del determinante della jacobiana di  $\mathbf{g}$ . Quindi si può scrivere:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{g}(A)} f(x, y) dx dy &\approx \sum_{i,j=1}^p f(\mathbf{g}(\alpha_i, \beta_j)) \cdot |\det \mathcal{J}_{\mathbf{g}}(\alpha_i, \beta_j)| \cdot \text{area}(Q_{i,j}) \approx \\ &\approx \iint_A (f \circ \mathbf{g}) |\det \mathcal{J}_{\mathbf{g}}|(u, v) du dv \end{aligned}$$

Quanto detto giustifica il seguente teorema.

Siano  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A \subset E$ ,  $A$  limitato,  $\text{Fr}(E)$  trascurabile,  $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(1)}(E; \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathbf{g}(A)$  limitata,  $f \in \mathcal{C}(g(A); \mathbb{R})$ ,  $f$  limitata. Se:

$$\exists N \subset A, \text{area}(N) = 0 : \mathbf{g}|_{A-N} \text{ è iniettiva, } \det \mathcal{J}_{\mathbf{g}} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in A - N$$

allora:

- I)  $\mathbf{g}(A)$  ha frontiera trascurabile
- II)  $\iint_{\mathbf{g}(A)} f(x, y) dx dy = \iint_A (f \circ \mathbf{g}) |\det \mathcal{J}_{\mathbf{g}}|(u, v) du dv$

Si verifichi, che nel caso unidimensionale degli integrali semplici, il termine  $|\det \mathcal{J}_{\mathbf{g}}|$  si riduce al ben noto  $g'(t)$ , in quanto  $g$  strettamente monotona.

□

Il cambiamento di variabili negli integrali doppi risulta particolarmente utile nel caso delle coordinate polari, per le quali:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

Per rispettare le condizioni imposte dal teorema precedente è opportuno specificare che  $\rho \geq 0$  e  $\varphi \in [a, a + 2\pi]$ . In questo modo la funzione non è iniettiva solamente su un insieme trascurabile. Riepilogando:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : [0, +\infty) \times [a, a + 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{g}(\rho, \varphi) &= (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ \mathbf{g} &\in \mathcal{C}^{(\infty)} \end{aligned}$$

Osserviamo, infine, che:

$$\det \mathcal{J}_{\mathbf{g}}(\rho, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = \rho$$