Analisi matematica L-B
Anno accademico 2006/2007
Docente prof. Enrico Obrecht

Appunti

Riccardo Trevisan

20 settembre 2007

Indice

Nel presente compendio, si fa talvolta riferimento a due testi: Bramanti-Pagani-Salsa – *Matematica* (calcolo infinitesimale e algebra lineare), Zanichelli, Bologna 2004 e Casali-Gagliardi-Grasselli *Geometria*, Esculapio – Progetto Leonardo, Bologna 2002. Per riferirsi a tali testi, si farà uso, rispettivamente, delle abbreviazioni: "BPS – *Matematica*" e "CGG – *Geometria*".

Si mette in guardia il lettore delle possibili inesattezze presenti nel compendio; l'esigenza di redigerlo il più in fretta possibile è sicuramente stata la causa delle numerose imprecisioni qui contenute. Qualora il lettore ne riscontrasse, si prega gentilmente di farlo presente all'autore che pubblicherà quanto prima un'edizione corretta.

È possibile contattarmi all'indirizzo riccardo.trevisan@gmail.com.

Invito il lettore a diffidare delle mie dispense di Analisi che vengono proposte e vendute da altri studenti. La loro "commercializzazione" offende chi si riserva il piacere di distribuirle gratuitamente. L'edizione aggiornata di questa dispensa è disponibile sul mio sito: www.riccardotrevisan.com.

Capitolo 1

Numeri complessi

1.1 Spazio vettoriale

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^n = \underset{1}{\mathbb{R}} \times \underset{2}{\mathbb{R}} \times \underset{\dots}{\dots} \times \underset{n}{\mathbb{R}}$. La struttura formata dall'insieme $\mathbb{R}^n$, dall'insieme $\mathbb{R}$, dalla somma vettoriale e dal prodotto scalare, può essere considerata spazio vettoriale, poiché ne soddisfa gli assiomi (CGG – *Geometria*, Def. 4.1). I suoi elementi si classificano come *vettori*.

Definizione 1.1 *Siano* $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_p \in \mathbb{R}^n$. *Diciamo che sono* linearmente indipendenti *quando:*

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \mathbf{a}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0)$$

Pertanto, se il numero di vettori è superiore alla dimensione dello spazio vettoriale ($p > n$) essi sono, per forza, linearmente dipendenti.

Pensando i vettori in uno spazio bidimensionale, essi sono linearmente dipendenti quando si trovano allineati su una stessa retta; in uno spazio tridimensionale, invece, vettori linearmente dipendenti giacciono su di uno stesso piano.

Definizione 1.2 *Sia* $\mathbf{V}$ *spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{R}$. *Diciamo che* $\mathbf{V}$ *ha* dimensione n *quando:*

a) $\exists \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ *che generano lo spazio;*

b) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *sono linearmente indipendenti.*

1.2 Campo complesso

Consideriamo un insieme $\mathbb{C}$ con le stesse proprietà di $\mathbb{R}^2$. Definiremo, qui di seguito, una moltiplicazione interna tale che $\left(\mathbb{R}^2, +, \times\right)$ sia un campo.

Chiamiamo $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi e supponiamo che $(\mathbb{C}, +, \times)$ sia un campo. Definiamo ora l'operazione di somma e prodotto in tale campo. Dati $\mathbf{z} = (z_1, z_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}$, definiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} + \mathbf{w} &= (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} &= (z_1 w_1 - z_1 w_1, z_1 w_2 + z_2 w_1) \end{aligned}$$

È possibile dimostrare che $(\mathbb{C} - (0,0), +, \cdot)$ è un gruppo commutativo e che il prodotto così definito è distributivo rispetto alla somma; si può quindi affermare che $(\mathbb{C}, +, \times)$ è un campo.

1.3 Elemento neutro moltiplicativo e reciproco

Occorre ora cercare l'elemento neutro moltiplicativo di tale campo. Dati $\mathbf{z} = (z_1, z_2), \mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$, l'elemento neutro dovrà verificare che:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{a} = 1$$

Per trovare **a** è sufficiente risolvere il sistema generato da:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{a} = (z_1 w_1 - z_1 w_1, z_1 w_2 + z_2 w_1) = (z_1, z_2)$$

Per $z_1 \neq 0$ otteniamo $\mathbf{a} = (1, 0)$ che risulta essere quindi l'elemento neutro moltiplicativo.

□

Cerchiamo ora il reciproco di **z**, ossia quel numero $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$ tale che:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = (z_1 w_1 - z_1 w_1, z_1 w_2 + z_2 w_1) = (1, 0)$$

Per $z_1 \neq 0$ si ottiene che:

$$\frac{1}{(z_1, z_2)} = \left(\frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2}, -\frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2} \right)$$

1.4 Unità immaginaria e forma algebrica

Capitolo 2

Integrali generalizzati

2.1 Funzioni integrabili e integrale generalizzato

In alcuni casi può essere necessario calcolare integrali di funzioni discontinue, illimitate o integrali estesa a intervalli illimitati. Per questo motivo è necessario studiare l'integrabilità delle funzioni e, se possibile, calcolarne l'integrale generalizzato.

Definizione 2.1 *Siano* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, $f \in \mathcal{C}([a, b); \mathbb{R})$. *Diciamo che* f *è* integrabile in senso generalizzato *sull'intervallo* $[a, b)$ *quando esiste reale il limite* $\lim_{x \to b^-} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t$. *In tal caso il numero reale* $\lim_{x \to b^-} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t$ *verrà detto* integrale generalizzato *di* f *in* $[a, b)$ *e verrà indicato col simbolo:*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.2 Proprietà degli integrali generalizzati

Per gli integrali generalizzati vale la seguente relazione:

Teorema 2.2

$$\forall y_1, y_2 \in [a, b), y_1 < y_2 \qquad \int_{y_1}^{y_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in [a, b), f(y) \geq 0$$

La relazione $\Leftarrow$ si dimostra per monotonia dell'integrale, mentre la relazione opposta si dimostra per assurdo. Infatti se la funzione fosse tutta negativa, per $y_0 \in [a, b)$ esisterebbe almeno un $\delta \in \mathbb{R}^+$ per il quale $\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t < 0$.

$\square$

Teorema 2.3 *Siano* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, $f \in \mathcal{C}([a, b); \mathbb{R})$. *Allora la funzione tale che* $y \mapsto \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t$ *è crescente (risp. decrescente) se e solo se* $\forall t \in [a, b)$, $f(t) \geq 0$ *(risp.* $f(t) \leq 0$*).*

$\square$

È facile dimostrare che il convergere di una funzione $g(t)$ ad un numero $l \in \mathbb{R}^+$ per $t \to +\infty$ non è condizione sufficiente affinché la funzione sia integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[0, +\infty$. Si consideri, infatti, $g(t) \geq \frac{l}{2}, \forall t \geq t_1$; suddividendo opportunamente l'integrale $\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$ si nota che esso risulterà sempre maggiore o uguale alla somma $\int_0^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^y \frac{l}{2}\,\mathrm{d}t$, in cui il secondo termine diverge per $y \to +\infty$.

2.3 Il confronto per gli integrali generalizzati

Come vedremo in seguito, sarà fondamentale l'utilizzo di un criterio di confronto per stabilire l'integrabilità delle funzioni integrande. Pertanto riportiamo di seguito il risultato dello studio di integrabilità per la funzione $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi, la funzione $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, è integrabile in a $+\infty$ se e solo se $\alpha > 1$.

In modo analogo si può verificare che:

$$\exists \lim_{y \to 0^+} \int_y^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1 - \alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi, la funzione $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, è integrabile in a 0^+ se e solo se $\alpha < 1$.

□

Come già anticipato, vale il seguente *teorema del confronto* per gli integrali generalizzati.

Teorema 2.4 (Teorema del confronto) *Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, $f, g \in \mathcal{C}([a, b); \mathbb{R})$. Allora:*

I) *Se $\forall t \in [a, b)$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ e g è integrabile in senso generalizzato su $[a, b)$, allora f è integrabile in senso generalizzato su $[a, b)$.*

II) *Se $\forall t \in [a, b)$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ e f non è integrabile in senso generalizzato su $[a, b)$, allora g non è integrabile in senso generalizzato su $[a, b)$.*

III) *Se $\forall t \in [a, b)$, $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$ e $f(t) \sim g(t)$ per $t \to b^-$, allora gli integrali generalizzati di f e g hanno lo stesso comportamento.*

□

Data una generica funzione $f(t)$, è spesso utile maggiorarla con $|f(t)|$, poiché quest'ultima è particolarmente facile da studiare, in quando non negativa (e di conseguenza la funzione integrale di $|f(t)|$ sarà crescente). Perciò forniamo la seguente definizione.

Definizione 2.5 *Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, $f \in \mathcal{C}([a, b); \mathbb{R})$. Diciamo che f è* assolutamente integrabile *in senso generalizzato quando $|f|$ è integrabile in senso generalizzato.*

□

Sfruttando il teorema del confronto possiamo quindi enunciare anche il prossimo teorema.

Teorema 2.6 *Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, $f, g \in \mathcal{C}([a, b); \mathbb{R})$. Se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato allora f è integrabile in senso generalizzato.*

Vale a dire che l'assoluta integrabilità in senso generalizzato implica l'integrabilità in senso generalizzato.

2.4 Integrazione su intervalli aperti

Come già evidenziato, talvolta è necessario calcolare integrali di funzioni su intervalli aperti sia a destra che a sinistra. Sfruttiamo quindi la seguente definizione.

Definizione 2.7 *Siano I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R})$. Diciamo che f è* integrabile in senso generalizzato *su I quando $\exists c \in I$ tale che:*

a) $f|_{(\inf I, c]}$ *è integrabile in senso generalizzato;*

b) $f|_{[c, \sup I)}$ *è integrabile in senso generalizzato.*

In tal caso chiamiamo integrale generalizzato *di f su I il numero reale*

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\inf I}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\sup I} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Capitolo 3

Serie numeriche

3.1 Successioni e serie

Consideriamo una generica successione in $\mathbb{R}$ $(a_n)_(n \in \mathbb{N})$ e proviamo a sommarne tutti i termini. Otterremo una nuova successione i cui termini saranno i seguenti:

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= s_0 + a_1 = a_0 + a_1 \\
s_2 &= s_1 + a_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} = a_0 + \ldots + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sarebbe quindi naturale chiedersi se esiste $\lim_{n\to+\infty} s_n$ che verrebbe naturale indicare con $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Forniamo quindi la seguente definizione.

Definizione 3.1 *Chiamiamo* serie*, avente per successione dei termini la successione* $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$*, la successione delle somme parziali* $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{(n\in\mathbb{N})}$ *e la indichiamo con il simbolo:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

3.2 Convergenza della serie

Diciamo

Capitolo 4

Funzioni di più variabili

4.1 Modulo di un vettore

In $\mathbb{R}^n$, come in $\mathbb{C}$, non è possibile definire una relazione d'ordine, ma è tuttavia possibile ricondursi all'insieme dei reali dato un vettore di $\mathbb{R}^n$. Anche in questo caso, grazie al modulo. Esso rappresenta, geometricamente, la sua distanza dall'origine del piano in cui giace.

Definizione 4.1 *Sia* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Definiamo* modulo *di* $\mathbf{x}$ *il numero reale*

$$|\mathbf{x}| \stackrel{\text{def}}{=} |(x_1, \dots, x_n)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, possiede le seguenti proprietà:

I) $|\mathbf{x}| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad |\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

II) $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$

III) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$

IV) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \geq ||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||$

Le proprietà I) e II) di deducono facilmente dalla definizione, mentre per dimostrare le proprietà III) e IV) occorre prima introdurre una nuova operazione fra vettori: il prodotto scalare.

4.2 Prodotto scalare

Definizione 4.2 *Siano* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, definiamo il loro* prodotto scalare $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nel seguente modo:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, possiede le seguenti proprietà

I) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ (distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma)

II) $(\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ (distributiva del prodotto scalare rispetto al prodotto per scalare)

III) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{y} \times \mathbf{x}$ (commutativa)

IV) $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$

Tutte queste proprietà sono di facile dimostrazione a partire dalla definizione di prodotto scalare fra vettori.

$\square$

Nel caso $n = 2$ si può pensare lo spazio $\mathbb{R}^2$ come il campo $\mathbb{C}$. Ciò permette di fare qualche interessante considerazione. Poniamo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Il loro prodotto sarà:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 &= \mathrm{Re}((x_1 + ix_2)(y_1 - iy_2)) \\ &= \mathrm{Re}((x_1 + ix_2)(\overline{y_1 - iy_2})) = \mathrm{Re}(|\mathbf{x}|e^{it}|\mathbf{y}|e^{-is}) \\ &= \mathrm{Re}(|\mathbf{x}||\mathbf{y}|e^{i(t-s)}) = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos(t-s)\end{aligned}$$

Da ciò si deduce che il prodotto tra vettori di cui uno dei due sia nullo oppure il prodotto tra vettori perpendicolari fra loro è uguale a zero. Il prodotto di vettori con stessa direzione e stesso verso è uguale al prodotto dei moduli; il prodotto di vettori con stessa direzione e verso opposto è uguale all'opposto del prodotto dei moduli.

Nel caso $n = 3$, è possibile ancora una volta riportarsi al piano complesso, se consideriamo come spazio bidimensionale il piano comune ai due vettori.

$\square$

Le considerazioni svolte sino ad ora ci permettono di dimostrare quasi completamente le proprietà III) e IV) del modulo di un vettore. Elevando al quadrato entrambi i membri della disequazione della proprietà III) e semplificando, si ottiene infatti:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

che ora dimostriamo. Se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 0$ è già dimostrato, poiché $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \geq 0 \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Se invece $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq 0$ occorre ricorrere alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

Questa si dimostra a partire dalla disuguaglianza

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \quad |\lambda x + y| \geq 0$$

Elevando al quadrato il modulo ed eseguendo quindi gli opportuni prodotti scalari si ottiene un polinomio di secondo grado in λ che risolve la disuguaglianza ≥ 0 per ogni λ quando il suo discriminante è ≤ 0. Ciò equivale a scrivere:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \leq 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

Questo dimostra la proprietà III) del modulo di un vettore. Per una dimostrazione rigorosa della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si rimanda al BPS – *Matematica*, cap. 2, teor. 3.4 o al CGG – *Geometria*, Prop. 8.1(d).

4.3 Punti e insiemi

Generalizziamo ora il concetto di punto interno ad un insieme (o intervallo) visto per l'insieme dei reali, al concetto di interno per uno spazio di dimensione maggiore.

Definizione 4.3 *Siano* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$. *Definiamo* palla aperta *di centro* $\mathbf{c}$ *e raggio* r *l'insieme:*

$$B_r(\mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} - \mathbf{c}| < r\}$$

Definiamo palla chiusa *di centro* $\mathbf{c}$ *e raggio* r *l'insieme:*

$$\overline{B_r(\mathbf{c})} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} - \mathbf{c}| \leq r\}$$

□

Proponiamoci ora di classificare i punti di $\mathbb{R}^n$ in base all'appartenenza ad un insieme E.

Definizione 4.4 *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. *Diciamo che* $\mathbf{c}$ *è* punto interno *a* E *quando:*

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(\mathbf{c}) \subseteq E \qquad (\Rightarrow \mathbf{c} \in E)$$

Diciamo che $\mathbf{c}$ *è* punto esterno *a* E *quando* $\mathbf{c}$ *è punto interno a* E' *complementare di* E*, ossia:*

$$\exists s \in \mathbb{R}^+ : B_s(\mathbf{c}) \subseteq E' = \mathbb{R}^n - E \qquad (\Rightarrow \mathbf{c} \in E)$$

Diciamo che $\mathbf{c}$ *è* punto di frontiera *per* E *quando* $\mathbf{c}$ *non è punto interno a* E *e non è punto esterno a* E*.*

Quest'ultima affermazione equivale a negare le due precedenti.

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(\mathbf{c}) \subseteq E$$

si nega dicendo che:

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \exists \mathbf{x}_r \in B_r(\mathbf{c}) - E \;\Leftrightarrow\; \forall r \in \mathbb{R}^+,\, B_r(\mathbf{c}) \cap E' \neq \varnothing$$

Mentre

$$\exists s \in \mathbb{R}^+ : B_s(\mathbf{c}) \subseteq E'$$

si nega dicendo che:

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \exists \mathbf{y}_s \in B_s(\mathbf{c}) - E \;\Leftrightarrow\; \forall s \in \mathbb{R}^+,\, B_s(\mathbf{c}) \cap E \neq \varnothing$$

□

D'ora in poi useremo i seguenti simboli:

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ è punto di frontiera per } E\} \\ \mathrm{int}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} \text{ è punto interno a } E\} \end{aligned}$$

□

Svolgiamo ora alcune considerazioni. Poniamo $E = B_r(\mathbf{c})$. Allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \in B_r(\mathbf{c}) &\;\Rightarrow\; \mathbf{c} \in \mathrm{int}\,(B_r(\mathbf{c})) \\ |\mathbf{c}| > r &\;\Rightarrow\; \mathbf{c} \in \mathrm{int}\,(B_r(\mathbf{c})') \\ |\mathbf{c}| = r &\;\Rightarrow\; \mathbf{c} \in \mathrm{Fr}\,(B_r(\mathbf{c})) \end{aligned}$$

4.4 Definizioni di insiemi

Definizione 4.5 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiamo* chiusura di E *l'insieme*

$$\bar{E} \stackrel{\text{def}}{=} E \cup \mathrm{Fr}(E)$$

La chiusura di un insieme E ha la seguente caratteristica:

$$\bar{E} \supseteq E \supseteq \mathrm{int}(E)$$

□

Definizione 4.6 *Diciamo che E è* aperto *quando E coincide con il suo interno ($E = \mathrm{int}(E)$). Diciamo che E è* chiuso *quando E coincide con la sua chiusura ($E = \bar{E}$)*

Valgono quindi le seguenti osservazioni:

$$\begin{aligned} E \text{ è } \textit{aperto} \quad &\Leftrightarrow \quad E \cap \mathrm{Fr}(E) = \varnothing \\ E \text{ è } \textit{chiuso} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Fr}(E) \subseteq E \\ \mathrm{Fr}(E) &= \mathrm{Fr}(E) \\ \mathrm{Fr}(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{Fr}(\varnothing) = \varnothing \end{aligned}$$

Teorema 4.7 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. E è aperto se e solo se E' è chiuso.*

Il teorema si dimostra facilmente osservando che:

$$E \text{ è aperto} \;\Leftrightarrow\; E \cap \mathrm{Fr}(E) = \varnothing \;\Leftrightarrow\; E \cap \mathrm{Fr}(E') = \varnothing \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Fr}(E') \subseteq E' \;\Leftrightarrow\; E' \text{ è chiuso}$$

□

Definizione 4.8 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che E è* limitato *quando*

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbf{x} \in E, |\mathbf{x}| \leq k \qquad \left(\Rightarrow E \subseteq \overline{B_k(\mathbf{0})}\right)$$

Diciamo che E è compatto *quando E è limitato e chiuso.*

□

Siano $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione di insiemi inclusi in $\mathbb{R}^n$. Valgono quindi le seguenti osservazioni:

$$\begin{aligned} F_1, F_2 \text{ chiusi } &\Rightarrow\; F_1 \cup F_2 \text{ chiuso, } F_1 \cap F_2 \text{ chiuso} \\ F_k \text{ chiuso } \forall k \in \mathbb{N} &\not\Rightarrow\; \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k \text{ chiuso} \\ F_k \text{ chiuso } \forall k \in \mathbb{N} &\Rightarrow\; \bigcap_{k=0}^{+\infty} F_k \text{ chiuso} \end{aligned}$$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione di insiemi inclusi in $\mathbb{R}^n$. Valgono quindi le seguenti osservazioni:

$$\begin{aligned} A_1, A_2 \text{ aperti } &\Rightarrow\; F_1 \cap F_2 \text{ aperto} \\ F_k \text{ aperto } \forall k \in \mathbb{N} &\Rightarrow\; \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_k \text{ aperto} \\ F_k \text{ aperto } \forall k \in \mathbb{N} &\not\Rightarrow\; \bigcap_{k=0}^{+\infty} F_k \text{ aperto} \end{aligned}$$

4.5 Successioni vettoriali e limiti di successioni vettoriali

Già conosciamo