Analisi matematica L-C
Anno accademico 2007/2008
Docente prof. Enrico Obrecht

Appunti

Riccardo Trevisan

31 gennaio 2008

Indice

Nel presente compendio, si fa talvolta riferimento al testo: Giulio Cesare Barozzi – *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione* (ristampa aggiornata), Zanichelli, Bologna 2004. Per riferirsi a tale testo, si farà uso dell'abbreviazione: "B.MAT".

Si mette in guardia il lettore delle possibili inesattezze presenti nel presente compendio; l'esigenza di redigerlo il più in fretta possibile è sicuramente stata la causa delle numerose imprecisioni qui contenute. Qualora il lettore ne riscontrasse, si prega gentilmente di farlo presente all'autore che pubblicherà quanto prima un'edizione corretta. Ringrazio sentitamente Nicola Rispoli per avermi aiutato a correggere parecchi degli errori che ho commesso.

È possibile contattarmi all'indirizzo riccardo.trevisan@gmail.com.

Invito il lettore a diffidare delle mie dispense di Analisi che vengono proposte e vendute da altri studenti. La loro "commercializzazione" offende chi si riserva il piacere di distribuirle gratuitamente. L'edizione aggiornata di questa dispensa è disponibile sul mio sito: www.riccardotrevisan.com.

Capitolo 1

Complementi sull'integrazione

1.1 Integrazione per funzioni complesse di una variabile reale

Occupiamoci, innanzitutto, di definire una funzione complessa di una variabile reale. Posti I intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{C}$, possiamo definire f come segue:

$$f(t) = \operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t)$$

dove:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f &: I \to \mathbb{R} \\ \operatorname{Im} f &: I \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\square$

Presi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots n$, possiamo scrivere la seguente somma di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} f(s_j)\frac{b-a}{n} &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} f(s_j)\frac{b-a}{n} + i\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} f(s_j)\frac{b-a}{n} \to \\ &\to \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C} \qquad \text{per } n \to +\infty \end{aligned}$$

L'integrale così definito conserva le proprietà di *linearità* e *additività*, ma non quella di monotonia in quanto nel campo complesso non è possibile stabilire una relazione d'ordine.

È ancora valida la *disuguaglianza triangolare* per gli integrali. Infatti, presa $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{C})$, si verifica quanto segue:

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \max_{[a,b]} |f| \cdot (b-a)$$

□

Vediamo come il secondo teorema del calcolo integrale rimanga invariato quando integriamo funzioni complesse.

Teorema 1.1 *Sia* $f \in \mathcal{C}([a,b] \subseteq \mathbb{R};\mathbb{C})$. *Allora:*

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (\operatorname{Re} f)'(t)\,\mathrm{d}t + i \int_a^b (\operatorname{Im} f)'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \operatorname{Re} f(b) - \operatorname{Re} f(a) + i\,(\operatorname{Im} f(b) - \operatorname{Im} f(a)) = \\ &= f(b) - f(a)\end{aligned}$$

Alle funzioni complesse a variabili reali, si possono estendere anche la definizione di *primitiva* valida per le funzioni reali di variabili reali, il teorema di integrazione *per parti* e quello di integrazione *per sostituzione.*

□

Studiamo ora l'integrazione in senso generalizzato per le funzioni complesse di variabili reali.

Definizione 1.2 *Siano* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,+\infty]$, $f \in \mathcal{C}([a,b);\mathbb{C})$, $y \in (a,b)$. *Diciamo che* f *è* integrabile in senso generalizzato *su* $[a,b)$ *quando* $\exists \lim_{y\to b} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}$. *In tal caso, tale limite viene detto* integrale generalizzato *di* f *e lo si indica come segue:*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si noti che f è integrabile in senso generalizzato *se e solo se* $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono integrabili in senso generalizzato. Per stabilire l'integrabilità delle funzioni integrande possiamo affidarci al *teorema del confronto*, così come è stato presentato per le funzioni reali. Ricordiamo, quindi, che l'assoluta integrabilità implica l'integrabilità in senso generalizzato.

Per l'integrazione su intervalli illimitati di una funzione $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, sappiamo che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *se e solo se* $\exists c \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ e $\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sono convergenti. In tal caso chiamiamo *integrale generalizzato* il numero complesso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Se, inoltre, esiste $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, diciamo che si chiama integrale nel senso del *valore principale.*

1.2 Funzioni continue a tratti

Definizione 1.3 *Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$, $c \in I$, f discontinua in c.*

1) Se $c \in \operatorname{int}(I)$ allora c è punto di discontinuità di prima specie *quando:*

   a) $\exists \lim_{t \to c^-} f(t) \in \mathbb{C}$;

   b) $\exists \lim_{t \to c^+} f(t) \in \mathbb{C}$;

   (tali limiti possono essere anche diversi fra loro)

2) Se $c = \min I$ allora c è punto di discontinuità di prima specie *per f quando $\exists \lim_{t \to c^+} f(t) \in \mathbb{C}$;*

3) Se $c = \max I$ allora c è punto di discontinuità di prima specie *per f quando $\exists \lim_{t \to c^-} f(t) \in \mathbb{C}$.*

□

D'ora in poi faremo uso delle seguenti notazioni:

$$f(c^+) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to c^+} f(t) \qquad f(c^-) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to c^-} f(t)$$

□

Osservazione 1.4 Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, f monotona, $c \in I$, c punto di discontinuità per f. Allora c è punto di discontinuità di prima specie.

In altre parole, se la funzione è monotona crescente o decrescente, allora i punti di discountinuità sono tutti di prima specie, in quanto esistono tutti i limiti unilateri di f che abbiano senso.

Definizione 1.5 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Diciamo che f è* continua a tratti *quando f è continua, oppure quando i suoi punti di discontinuità sono in numero finito e tutti di prima specie.*

□

Consideriamo ora la funzione $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua a tratti e i punti $c_1, \dots, c_p \in (a, b)$ di discontinuità di f interni ad $[a, b]$ con $a < c_1 < c_2 < \dots < c_p < b$. Allora la funzione $f_{[0]}$ così definita

$$f_{[0]} : [a, c_1] \to \mathbb{C} \qquad f_{[0]}(t) = \begin{cases} f(a^+) & \text{se } t = a \\ f(t) & \text{se } t \in (a, c_1) \\ f(c_1^-) & \text{se } t = c_1 \end{cases}$$

risulta essere continua. Possiamo fare un ragionamento analogo per $f_{[1]}$, $f_{[2]}$, ecc.

$$f_{[1]} : [c_1, c_2] \to \mathbb{C} \qquad f_{[1]}(t) = \begin{cases} f(c_1^+) & \text{se } t = c_1 \\ f(t) & \text{se } t \in (c_1, c_2) \\ f(c_2^-) & \text{se } t = c_2 \end{cases}$$

Osservazione 1.6 Se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti su $[a, b]$ allora è limitata.

1.3 Integrabilità delle funzioni continue a tratti

Teorema 1.7 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una funzione complessa continua a tratti. Allora $\exists \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ definito come limite delle somme di Cauchy-Riemann.*

Per gli integrali di funzioni continue a tratti valgono sempre le proprietà di *linearità*, *additività* e *monotonia* (questa solo nel caso di funzioni reali e non complesse). Vale anche la *disuguaglianza triangolare* per gli integrali mostrata in precedenza.

Osservazione 1.8 Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ sono funzioni continue a tratti ed esistono un numero finito di punti nei quali i valori delle funzioni differiscono fra loro

$$\exists c_1, \ldots, c_p \in [a, b] : \forall t \in [a, b] \setminus \{c_1, \ldots, c_p\} \quad f(t) = g(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

gli integrali delle due funzioni sono uguali fra loro.

Per dimostrare questo risultato, consideriamo, per ora, il caso in cui le due funzioni differiscano in un solo punto (e siano continue in $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \setminus \{c\}$), salvo poi estendere il ragionamento per i punti rimanenti. Chiamiamo c il punto in questione. Si ha quindi $c \in (a, b)$. Scegliamo un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente piccolo affinché si verifichi che $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset [a, b]$. Ora:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f(t) - g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^{c-\varepsilon} |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{c+\varepsilon}^{b} |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} |f(t)| + |g(t)|\,\mathrm{d}t \leq 2\varepsilon\,(\sup|f| + \sup|g|)$$

L'arbitrarietà di ε dimostra la tesi.

$\square$

Dal precedente risultato possiamo evidenziare che se modifichiamo in un numero finito di punti la nostra funzione continua a tratti di partenza, l'integrale della nuova funzione modificata, tuttora continua a tratti, è uguale al precedente.

Ne consegue che possiamo scrivere l'integrale di una funzione continua a tratti come la somma degli integrali delle funzioni continue $f_{[k]}$ definite in precedenza.

Osservazione 1.9 Siano $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ funzione continua a tratti, $c_1, \ldots, c_p \in (a, b)$ i punti di discontinuità di f interni al dominio tali che $a < c_1 < \ldots < c_p < b$. Consideriamo le funzioni continue $f_{[k]}$ definite in precedenza con $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < p - 1$. Le funzioni $f_{[k]}$ saranno così definite:

$$\begin{aligned} f_{[0]} &: [a, c_1] \to \mathbb{C} \\ f_{[k]} &: [c_k, c_{k+1}] \to \mathbb{C} \\ f_{[p]} &: [c_p, b] \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

Si noti che

$$f_{[k]}(t) = f(t) \quad \forall t \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f_{[k]})$$

L'integrale delle funzione di partenza risulta quindi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^{c_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_p}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^{c_1} f_{[0]}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f_{[k]}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_p}^b f_{[p]}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

1.4 Derivabilità per le funzioni continue a tratti

Definizione 1.10 *Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione continua a tratti, $c \in \operatorname{int}(I)$, f derivabile in $I \smallsetminus \{c\}$. Diciamo che c è* punto di non derivabilità di prima specie *quando esistono i seguenti limiti e sono complessi:*

$$\exists \lim_{t \to c^-} f'(t) \in \mathbb{C}\,, \qquad \exists \lim_{t \to c^+} f'(t) \in \mathbb{C}$$

Definizione 1.11 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ funzione continua a tratti. Se esistono un numero finito di punti $c_1, \ldots, c_p \in (a, b)$ tali che $f \in \mathcal{C}^{(1)}\left((a, b) \smallsetminus \{c_1, \ldots, c_p\}; \mathbb{C}\right)$ con c_i (per $i = 1, \ldots, p$) punti di non derivabilità di prima specie, allora diciamo che f è* $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti.

Possiamo fornire ora una nuova definizione di funzione continua a tratti e $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti.

Definizione 1.12 *Siano I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$.*

1) Diciamo che f è continua a tratti *quando $f\big|_{[a,b]}$ è continua a tratti $\forall a, b \in I$ con $a < b$;*

2) Diciamo che f è $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti *quando $f\big|_{[a,b]}$ è $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti $\forall a, b \in I$ con $a < b$.*

1.5 Calcolo di integrali per funzioni $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti

Osservazione 1.13 Siano $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ funzione $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti, $c \in (a, b)$ un punto di non derivabilità di prima specie per f. Osserviamo che se assegnamo un valore arbitrario del punto in cui f' non esiste, l'integrale $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ non cambia. Pertanto:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^c f'_{[0]}(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f'_{[1]}(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= f_{[0]}(c) - f_{[0]}(a) + f_{[1]}(b) - f_{[1]}(c) = \\ &= f(c^-) - f(a) + f(b) - f(c^+) = \\ &= f(b) - f(a) - (f(c^+) - f(c^-))\end{aligned}$$

A parole, l'integrale di f' è uguale all'incremento di f diminuito del "salto" che f compie nel punto c. Si noti che qualora f sia continua nel punto c, l'integrale si riduce a:

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

La precedente osservazione si riassume nel teorema fondamentale del calcolo integrale esteso alle funzioni $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti.

Teorema 1.14 (fondamentale del calcolo integrale) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ funzione $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti, $c_i \in (a, b)$ con $i = 1, \dots, p$ p punti di discontinuità di prima specie interni al dominio tali che $a < c_1 < \dots < c_p < b$. Allora:*

$$f\big|_{[a,b]\smallsetminus\{c_1,\dots,c_p\}} \in \mathcal{C}^{(1)}$$
$$\Downarrow$$
$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b^-) - f(a^+) - \sum_{i=1}^{p} \left(f(c_i^+) - f(c_i^-)\right)$$

È stato scritto $f(b^-) - f(a^+)$ anziché $f(b) - f(a)$ per evitare di sottrarre eventuali salti della funzione in a e in b qualora fossero stati di punti di discontiunuità.

Si può concludere enunciando il teorema di integrazione per parti valido anche per le funzioni $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti.

Teorema 1.15 (di integrazione per parti) *Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ funzioni $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti tali che $f, g \in \mathcal{C}^{(1)}([a, b] \smallsetminus \{c\}; \mathbb{C})$. Allora:*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \left(f(c^+)g(c^+) - f(c^-)g(c^-)\right) - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Il risultato si raggiunge uguagliando i membri di destra delle due seguenti espressioni:

$$\int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \big(f(c^+)g(c^+) - f(c^-)g(c^-)\big)$$
$$\int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Si noti, inoltre, che se le funzioni sono discontinue in un numero finito di punti $c_1 < \ldots < c_p$ il teorema si può facilmente riscrivere come segue:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\, + \\ - \sum_{i=1}^{p} \big(f(c_i^+)g(c_i^+) - f(c_i^-)g(c_i^-)\big)\end{aligned}$$

1.6 Cenni sull'integrale di Lebesgue. Teoremi di Fubini e Tonelli

Per alcuni aspetti, la formula dell'integrale di Riemann, non è soddisfacente, in particolare per l'impossibilità di integrare alcune funzioni. Lebesgue propose quindi una teoria di integrazione differente che possiede tutt'ora molti vantaggi. Eccone alcuni:

- permette di integrare funzioni generalissime;
- per le funzioni note coincide con l'integrale normale;
- L^1 e L^2 sono completi.

Chiariamo subito il significato di L^1 e L^2.

Definizione 1.16 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Chiamiamo $L^1(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ tali che l'integrale di Lebesgue $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ esiste finito. Chiamiamo $L^2(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ tali che l'integrale di Lebesgue $\int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ esiste finito.*

Date due funzioni f e g, diciamo poi che f e g sono *equivalenti* ($f \sim g$) se $f(t) = g(t)$ quasi dappertutto, ossia $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \{I_k\}$ successione di intervalli tale che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \text{lunghezza}(I_k) \leq \varepsilon, \qquad f(t) = g(t) \quad \forall t \notin \bigcup_{k=0}^{+\infty} I_k$$

Una funzione integrabile secondo Lebesgue, e cioè appartenente a L^1, viene anche chiamata funzione *sommabile.*

Osservazione 1.17 Posto I intervallo di $\mathbb{R}$ limitato. Possiamo affermare che se $f \in L^2(I)$ allora $f \in L^1(I)$ ed è quindi sommabile.

Per dimostrare quest'affermazione, occorre conoscere la teoria del prodotto scalare, definito nel capitolo 5. Intanto, possiamo accontentarci dell'osservazione 5.6 nella quale affermiamo che il prodotto scalare di due funzioni verifica la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, già incontrata nel corso di Analisi matematica L-B. Enunciamo provvisoriamente tale disuguaglianza:

$$|(f|g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Perciò, se prendiamo la seconda funzione identicamente uguale a 1, il prodotto scalare di f con 1, come verrà spiegato meglio nel paragrafo 5.3 a pagina 46, è:

$$|(f|1)| = \int_I |f(t)| \cdot 1 \,\mathrm{d}t \leq \left(\int_I |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_I \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{lunghezza}(I)} \cdot \|f\|_2$$

Non esiste un risultato analogo se l'intervallo considerato non fosse limitato.

□

Teorema 1.18 (di Fubini) *Sia f una funzione sommabile su $\mathbb{R}^2$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Allora:*

I) la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ ($\in L^1(\mathbb{R})$) per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}$;

II) la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ è sommabile su $\mathbb{R}$ ($\in L^1(\mathbb{R})$);

III) si ha:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Analogo risultato scambiando i ruoli di x e y.

Teorema 1.19 (di Tonelli) *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tale che:*

a) la funzione $y \mapsto |f(x,y)|$ è sommabile su $\mathbb{R}$ ($\in L^1(\mathbb{R})$) per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}$;

b) la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y$ è sommabile su $\mathbb{R}$ ($\in L^1(\mathbb{R})$).

Allora f è sommabile su $\mathbb{R}^2$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

È possibile verificare, ad esempio, che la funzione $(x,y) \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}$ è sommabile in quanto verifica le condizioni a) e b) del teorema di Tonelli. Al contrario, la funzione $(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}$ non rispetta la condizione b); si può anche verificare che, supponendo questa seconda funzione sommabile, la conseguenza II) del teorema di Fubini risulta, infatti, falsa.

1.7 Convoluzione

Definizione 1.20 *Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabili su $\mathbb{R}$. Chiamiamo* convoluzione *di f e g la funzione:*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

Studiamo alcune proprietà della convoluzione che saranno molto utili nel seguito.

Teorema 1.21 *Siano $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sommabili su $\mathbb{R}$. Allora:*

1) $(f * g) * h = f * (g * h)$*;*

2) $f * g = g * f$*;*

3) $f * (g + h) = f * g + f * h$*.*

Tutte e tre le proprietà si dimostrano abbastanza facilmente a partire dalla definizione. In particolare, per la 2) vale quando segue considerando il cambio di variabile $t - s = u$:

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u = (g * f)(t)\end{aligned}$$

Teorema 1.22 *Siano $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ entrambe sommabili su $\mathbb{R}$. Allora la loro convoluzione è ancora sommabile su $\mathbb{R}$.*

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-s)y(s)|\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(s)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-s)|\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s$$

dove l'integrale interno converge assolutamente poiché x è sommabile come si può verificare applicando il cambio di variabile $t - s = v$. Ora, per il teorema di Tonelli (teorema 1.19) la funzione $(t, s) \mapsto x(t-s)y(s) \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$, mentre, per il teorema di Fubini (teorema 1.18):

1) $s \mapsto x(t-s)y(s) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ per quasi tutti i t;

2) $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Ciò conclude la dimostrazione.

Teorema 1.23 *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile e di classe $\mathcal{C}^{(1)}$ tale che x' sia sommabile. Allora esiste la convoluzione $x' * y \quad \forall y \in L^1$ e si ha:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(x'(t-s)y(s)\right) = x(t-s)y(s)$$

Capitolo 2

Funzioni di una variabile complessa

2.1 Caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa

Com'è noto dallo studio del campo complesso e degli spazi vettoriali di dimensione maggiore di uno, l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi può essere pensato in molti casi come l'insieme $\mathbb{R}^2$ di coppie ordinate (x, y). Anche i numeri complessi potrebbero essere quindi considerati vettori di $\mathbb{R}^2$ ($\mathbf{z} = (a, b)$), tuttavia farà comodo, in questo caso, considerarli appartenenti all'insieme $\mathbb{C}$ e mantenere la notazione $z = a + ib$.

Definiamo quindi una funzione complessa di una variabile complessa. Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$, $u, v : A \to \mathbb{R}$, $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

□

Possiamo ora studiare alcune proprietà delle funzioni di una variabile complessa.

Definizione 2.1 *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Diciamo che f è* continua *in z_0 quando per ogni successione $\{s_n\}$ a valori in A tale che $s_n \to z_0$, si ha che $f(s_n) \to f(z_0)$. Ciò equivale a dire che $u(s_n) \to \operatorname{Re} f(z_0)$ e $v(s_n) \to \operatorname{Im} f(z_0)$. Perciò f è continua in z_0 se e solo se u e v sono continue in z_0.*

Definizione 2.2 *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{C}$, ω_0 punto di accumulazione per A. Diciamo che esiste il limite $\lim_{z \to \omega_0} f(z) = \ell$ quando per ogni successione $\{t_n\}$ a valori in $A \setminus \{\omega_0\}$ tale che $t_n \to \omega_0$, si ha che $f(t_n) \to \ell$. Ciò avviene se e solo se $u(z) \to \operatorname{Re} \ell$ e $v(z) \to \operatorname{Im} \ell$ per $z \to \omega_0$.*

2.2 Derivabilità di funzioni di una variabile complessa

Definizione 2.3 *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{int}(A)$. *Diciamo che* f *è* derivabile *in* z_0 *quando esiste ed è complesso il limite del rapporto incrementale* $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}$ *(oppure* $\exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \in \mathbb{C}$*). In tal caso, tale limite si chiama* derivata *di* f *in* z_0 *e si indica con* $f'(z_0)$, $\mathrm{D}f(z_0)$ *o* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$

Siccome la definizione di derivata in campo complesso è del tutto analoga a quella in vista in $\mathbb{R}$, le proprietà di derivata di somma, prodotto, quoziente, composizione e funzione inversa continuano a valere anche in $\mathbb{C}$.

Posti $z_0 = x_0 + iy_0$, $h = h_1 + ih_2$, $f = u + iv$ in accordo con quanto definito precedentemente, svolgiamo le seguenti considerazioni valide per $h \to 0$ e dove $\sigma(h) = o(h)$ e $\tau(h) = o(h)$ sempre per $h \to 0$:

$$
\begin{aligned}
f(z_0+h) - f(z_0) = \ell h + o(h) &= f(x_0 + h_1 + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + iy_0) = \\
&= \ell_1 h_1 - \ell_2 h_2 + i(\ell_2 h_1 + \ell_1 h_2) + \sigma(h_1 + ih_2) + i\tau(h_1 + ih_2) = \\
&= u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + \\
&\quad - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Segue che:

$$
\begin{aligned}
u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0) &= \ell_1 h_1 - \ell_2 h_2 + \sigma(h_1, h_2) \\
v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0) &= \ell_2 h_1 + \ell_1 h_2 + \tau(h_1, h_2)
\end{aligned}
$$

Dove $\ell_1 h_1 - \ell_2 h_2$ e $\ell_2 h_1 + \ell_1 h_2$ sono trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Si deduce che se f è derivabile in $x_0 + iy_0$ allora lo sono anche u e v in (x_0, y_0) e il loro differenziale vale:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u_{(x_0,y_0)}(h_1, h_2) &= \ell_1 h_1 - \ell_2 h_2 \\
\mathrm{d}v_{(x_0,y_0)}(h_1, h_2) &= \ell_2 h_1 + \ell_1 h_2 \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \operatorname{Re} f'(x_0 + iy_0) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\operatorname{Im} f'(x_0 + iy_0) \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= \operatorname{Im} f'(x_0 + iy_0) \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) &= \operatorname{Re} f'(x_0 + iy_0)
\end{aligned}
$$

Perciò abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + iy_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + iy_0) \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + iy_0) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + iy_0) \\
(u + iv)'(x_0 + iy_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + iy_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + iy_0) = \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + iy_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + iy_0)
\end{aligned}
$$

Quanto detto sinora giustifica il seguente teorema.

Teorema 2.4 *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{int}(A)$. Allora f è derivabile in z_0 se e solo se:*

a) u e v sono differenziabili del punto (x_0, y_0);

b) si verifica che

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)
$$

In tal caso

$$
f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)
$$

Le condizioni espresse nel punto b) del teorema precedente prendono il nome di *equazioni di Cauchy-Riemann*.

Da queste considerazioni sulla derivabilità di funzioni di una variabile complessa, possiamo dedurre che alcuni tipi di funzioni sono certamente derivabili anche quando si opera con variabili complesse. Queste sono, ad esempio, le funzioni polinomiali e le razionali fratte (quozienti fra polinomi). Anche le funzioni esponenziali sono derivabili, tuttavia meritano un discorso a parte. Esprimendo $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ con $z = x + iy$, si ha che $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$. Queste sono di classe $\mathbb{C}^{(\infty)}$ e ci vuole poco a provare che verificano le condizioni di Cauchy-Riemann. Perciò e^z è derivabile in tutto $\mathbb{C}$ e la sua derivata vale ancora

$$
\mathrm{D}e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z
$$

2.3 Funzioni olomorfe e integrazione in campo complesso

Definizione 2.5 *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$. Diciamo che f è* olomorfa *in A quando:*

a) $\forall z \in A \quad f$ è derivabile in z;

b) f' è continua.

L'insieme delle funzioni olomorfe su A si indica con $H(A)$.

Definizione 2.6 *Chiamiamo* curva regolare *in* $\mathbb{C}$ *una funzione* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *tale che* $\gamma \in \mathcal{C}^{(1)}$ *e che* $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$. *La sua immagine* $\gamma([a, b])$ *è detta* sostegno *di* γ. *Diciamo che* γ *è* aperta *se* $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. *Diciamo che* γ *è* chiusa *se* $\gamma(a) = \gamma(b)$*; in tal caso richiediamo anche che* $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.

L'ultima condizione richiesta nel caso si tratti di curva chiusa è necessaria affinché nel punto in cui la curva termina, e quindi riparte, non si presenti una cuspide.

□

Il nostro scopo è ora definire l'operazione di integrazione di una funzione continua su una curva regolare. Per fare ciò, consideriamo, innanzitutto, la lunghezza della curva come somma delle lunghezze ℓ dei segmenti di una poligonale P che approssima la curva. Siano dunque $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare, $t_i \in [a, b]$ per $i = 0, \ldots, p$ con $t_0 < t_1 < \ldots < t_p$, $z_i = \gamma(t_i)$ con $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$. Allora:

$$l(P) = \sum_{i=1}^{p} |z_i - z_{i-1}| = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + (\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}))^2}$$

che applicando il teorema di Lagrange, e considerando i punti sempre più vicini fra loro, diventa:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p} \sqrt{(\gamma_1'(c_i)(t_i - t_{i-1}))^2 + (\gamma_2'(d_i)(t_i - t_{i-1}))^2} = \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sqrt{(\gamma_1'(c_i))^2 + (\gamma_2'(d_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \approx \\
&\approx \sum_{i=1}^{p} \sqrt{(\gamma_1'(c_i))^2 + (\gamma_2'(c_i))^2}(t_i - t_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left|\gamma'(c_i)\right| (t_i - t_{i-1}) \to \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t \qquad \text{per } p \to +\infty
\end{aligned}$$

Conosciamo ora la lunghezza della curva ma dobbiamo ancora calcolare l'integrale di una funzione f lungo di essa. Siano quindi $A \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(A; \mathbb{C})$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ curva regolare in A, cioè con sostegno contenuto in A ($\gamma([a, b]) \subseteq A$). Il nostro scopo è definire $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$. Perciò, se $\tau_i \in [a, b]$ per $i = 0, \ldots, p$, si ha la seguente somma di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p} f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \approx \sum_{i=1}^{p} f(\gamma(\tau_i))\gamma'(\sigma_i)(t_i - t_{i-1}) \approx \\
&\approx \sum_{i=1}^{p} f(\gamma(\tau_i))\gamma'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \to \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{per } p \to +\infty
\end{aligned}$$

È quindi ragionevole definire un integrale di una funzione f su una curva γ come segue.

Definizione 2.7 *Siano* $A \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *curva regolare in* A, $f \in \mathcal{C}(A;\mathbb{C})$. *Chiamiamo* integrale complesso *di* f *su* γ *il numero complesso*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}$$

2.4 Proprietà dell'integrale complesso

Prendiamo due curve regolari $\gamma, \gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}$ dove γ^- risulta essere così definita:

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$$

In questo modo, le due curve hanno lo stesso sostegno ma vengono percorse in versi opposti. È facile dimostrare (operando il cambio di variabile: $a + b - t = u$) che:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Definizione 2.8 *Siano* $\gamma_1 : [b,c] \to \mathbb{C}$ *e* $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ *curve regolari. Diciamo che* γ_1 *e* γ_2 *sono* equivalenti *quando esiste una funzione* $\varphi : [a,b] \xrightarrow[1-1]{su} [c,d]$ *tale che:*

a) $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}$;

b) $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$;

c) $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Osservazione 2.9 Siano γ_1 e γ_2 curve regolari equivalenti in $A(\subseteq \mathbb{C})$, $f \in \mathcal{C}(A;\mathbb{C})$. Allora:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

L'osservazione è dimostrata operando un cambio di variabile con la funzione φ.

$\square$

Teorema 2.10 (fondamentale dell'integrale complesso) *Siano* A *un aperto di* $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *curva regolare in* A, $F \in H(A)$. *Allora:*

$$\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dimostrazione:

$$\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = (F\circ\gamma)(b) - (F\circ\gamma)(a)$$

Si noti che se la curva è regolare chiusa, e conosciamo una primitiva della funzione integranda, allora l'integrale è nullo perché i valori negli estremi coincidono. Questo non vale per funzioni che non possiedono una primitiva, come, ad esempio, le funzioni $z \mapsto \bar{z}$ e $z \mapsto \frac{1}{z}$.

□

Vogliamo ora definire una nuova curva regolare operando una concatenazione di curve regolari. Siano $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ curve regolari in $A(\subseteq \mathbb{C})$. Definiamo una nuova curva $\gamma : [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ in A come segue:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t + c - d) & \text{se } t \in (b, b + d - c] \end{cases}$$

Allora posta $f \in \mathcal{C}(A; \mathbb{C})$:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^{b+d-c} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Definizione 2.11 *Sia* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$*. Diciamo che* γ *è* curva regolare a tratti *quando* γ *è ottenuta concatenando un numero finito di curve regolare. In tal caso,* γ *è continua e* $\mathcal{C}^{(1)}$ *a tratti.*

Osservazione 2.12 Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(A; \mathbb{C})$, γ curva regolare a tratti contenuta in A ottenuta concatenando nell'ordine $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ curve regolari, allora si ha:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{p} \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ovviamente continua a valere il teorema fondamentale dell'integrale complesso.

□

Teorema 2.13 *Siano* A *un aperto connesso di* $\mathbb{C}$*,* $f \in \mathcal{C}(A; \mathbb{C})$*. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

i) *esiste una primitiva di* f*;*

ii) $\forall \gamma : [a, b] \to A$ *curva regolare a tratti,* $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ *dipende solo dagli estremi* $\gamma(a)$ *e* $\gamma(b)$*;*

iii) $\forall \lambda : [a, b] \to A$ *curva regolare a tratti chiusa si ha che* $\int_\lambda f(z)\,\mathrm{d}z = 0$*.*

Per fare ciò, consideriamo una curva che dipenda da un estremo fisso P e da uno variabile Q. Allora dobbiamo dimostrare che la funzione $g : A \to \mathbb{C}$ tale che $g(Q) = \int_P^Q f(z)\,\mathrm{d}z$ sia olomorfa e che la sua derivata sia la funzione f di partenza. Prendiamo quindi un punto Q' vicino al punto variabile Q.

Si ha:

$$\frac{g(Q')-g(Q)}{Q'-Q}=\frac{1}{Q'-Q}\left(\int_P^{Q'} f(z)\,\mathrm{d}z-\int_P^{Q} f(z)\,\mathrm{d}z\right)=$$
$$=\frac{1}{Q'-Q}\left(\int_P^{Q} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_Q^{Q'} f(z)\,\mathrm{d}z-\int_P^{Q} f(z)\,\mathrm{d}z\right)=$$
$$=\frac{1}{Q'-Q}\int_Q^{Q'} f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{Q'-Q}\int_0^1 f(Q+t(Q'-Q))(Q'-Q)\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^1 f(Q+t(Q'-Q))\,\mathrm{d}t$$

Perciò, per dimostrare che la sua derivata tende alla funzione di partenza, dimostriamo che il seguente valore assoluto tende a zero:

$$\left|\frac{g(Q')-g(Q)}{Q'-Q}-f(Q)\right|=\left|\int_0^1 f(Q+t(Q'-Q))\,\mathrm{d}t-f(Q)\right|=$$
$$=\left|\int_0^1 \big(f(Q+t(Q'-Q))-f(Q)\big)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^1 \big|f(Q+t(Q'-Q))-f(Q)\big|\,\mathrm{d}t\le$$
$$\le\max_{R\in[Q,Q']}|f(R)-f(Q)|\to 0\quad\text{per } Q'\to Q$$

□

Un interessante caso di studio, che qui viene solo accennato, è la ricerca di una primitiva della funzione complessa $z\mapsto\frac{1}{z}$. Per fare ciò è necessario restringere il campo $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^{**}$ così definito:

$$\mathbb{C}^{**}=\mathbb{C}-\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z=0,\operatorname{Re}z\le 0\}$$

In $\mathbb{C}^{**}$ la funzione logaritmo principale $\operatorname{Log}:\mathbb{C}^{**}\to\mathbb{C}$ definita come segue:

$$\operatorname{Log}(z)=\log|z|+i\operatorname{Arg}z$$

è olomorfa, come è possibile dimostrare verificando le condizioni di Cauchy-Riemann (vedi teorema 2.2). Per una trattazione completa di questo esempio, si guardi B.MAT, paragrafo 4.3 pagine 127-129 ed esempi 4.5-6 e 4.5-7 pagine 147-149.

2.5 Teoremi sugli integrali complessi

Definizione 2.14 *Sia $\gamma:[a,b]\to A$ curva regolare a tratti. Allora diciamo che γ è una* curva semplice *quando:*

a) γ *è* $1-1$ *se* $\gamma(a)\neq\gamma(b)$*;*

b) $\gamma\big|_{[a,b)}$ *è* $1-1$ *se* $\gamma(a)=\gamma(b)$.

Chiamiamo circuito *una curva regolare a tratti semplice e chiusa.*

Teorema 2.15 (di Jordan) *Sia γ un circuito di $\mathbb{C}$. Allora $\mathbb{C}\setminus\gamma([a-b]) = B_1 \cup B_2$, dove B_1 e B_2 sono insiemi fra loro disgiunti, connessi e aperti; B_1 è limitato e B_2 non limitato.*

D'ora in poi indicheremo con $L(\gamma)$ l'insieme connesso e limitato del teorema di Jordan (nel nostro caso B_1).

Teorema 2.16 (di Cauchy) *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, $f \in H(A)$, γ circuito di A, $L(\gamma) \subset A$. Allora $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Non dimostriamo in maniera rigorosa questo teorema, ma ci accontentiamo di fornirne una spiegazione in un caso particolare. Consideriamo un rettangolo con i lati paralleli agli assi tale che $L(\gamma) = (a, b) \times (c, d)$. Definiamo i quattro lati con le seguenti quattro curve:

$$
\begin{array}{ll}
\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C} & \gamma_1(t) = t + ic \\
\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C} & \gamma_2(t) = b + is \\
\gamma_3 : [a, b] \to \mathbb{C} & \gamma_3(t) = t + id \\
\gamma_4 : [c, d] \to \mathbb{C} & \gamma_4(t) = a + is
\end{array}
$$

Allora la curva che descrive il rettangolo è composta da $\gamma = \gamma_1\gamma_4\gamma_3^-\gamma_4^-$ e possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_a^b f(t + ic)\,\mathrm{d}t + \int_c^d f(b + is)i\,\mathrm{d}s + \\
&\quad - \int_a^b f(t + id)\,\mathrm{d}t - \int_c^d f(a + is)i\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_a^b (f(t + ic) - f(t + id))\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + i\int_c^d (f(b + is) - f(a + is))\,\mathrm{d}s = \\
&= -\int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(t + iy)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t + i\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x + is)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \\
&= \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + i\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + \right. \\
&\quad \left. + i\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0
\end{aligned}
$$

□

Nei teoremi che seguono, si farà riferimento a curve percorse in un certo verso, orario o antiorario. Definiamo quindi in maniera rigorosa il verso orario come segue. Preso un punto su una circonferenza, il suo vettore tangente nel punto $\gamma(t_0)$ è $\gamma'(t_0)$. La normale nello stesso punto è determinata da $i\gamma'(t_0)$, ossia il medesimo vettore tangente ruotato di $\pi/2$ in senso positivo. Tale normale si dice *entrante* se esiste δ 0 tale che:

$$\forall s \in (0, \delta) \quad \Rightarrow \quad \gamma(t_0) + is\gamma'(t_0) \in L(\gamma)$$

Perciò la curva γ è *orientata positivamente* rispetto a $L(\gamma)$ quando la normale è entrante in $L(\gamma)$ in tutti i punti in cui essa è definita. Scriviamo γ^+ per indicare che la curva è percorsa nel verso positivo, viceversa scriviamo γ^-.

□

Teorema 2.17 (di deformazione) *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, $f \in H(A)$, γ_1, γ_2 circuiti in A tali che $\gamma_2 \subset L(\gamma_1)$ e $L(\gamma_1) \smallsetminus L(\gamma_2) \subset A$. Allora:*

$$\int_{\gamma_1^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2^+} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Il teorema può essere dimostrato considerando due curve di raggio r_1 e r_2, così definite:

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \qquad \gamma_r(t) = re^{it}$$

Già sappiamo calcolare l'integrale su una curva di questo tipo (indipendentemente dal raggio) della funzione $\frac{1}{z}$: $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$. Perciò la differenza dei due integrali della stessa funzione $\frac{1}{z}$ sulle curve γ_1^+ e γ_2^+ sarà nulla. È possibile ottenere questo risultato congiungendo le due curve mediante due segmenti. Si formano così due nuovi circuiti sui quali l'integrale di $\frac{1}{z}$ è nullo per il teorema di Cauchy (teorema 2.16). Per la dimostrazione estesa si guardi B.MAT, proposizione 4.5-5 pagine 154-155.

Teorema 2.18 (Formula integrale di Cauchy) *Siano A un aperto connesso di $\mathbb{C}$, $f \in H(A)$, γ circuito in A, $L(\gamma) \subset A$, $z_0 \in L(\gamma)$. Allora:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Prima di dimostrare questo teorema, notiamo che la funzione $w \mapsto \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z$ è di classe $\mathcal{C}^{(\infty)}$. Questo si può facilmente verificare derivando più volte la funzione integranda rispetto a w. Passiamo ora alla dimostrazione. Consideriamo il punto z_0 interno al circuito e $\gamma_r = z_0 + re^{it}$. Per il teorema di deformazione possiamo scrivere:

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \lim_{r \to 0^+} \int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z =$$
$$\int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it}\,\mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Segue che:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|\int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_r^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| = \\
&= \left|\int_{\gamma_r^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| = \left|i\int_0^{2\pi} \big(f(z_0+re^{it}) - f(z_0)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leq \\
&\leq \int_0^{2\pi} \left|f(z_0+re^{it}) - f(z_0)\right|\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} \max_{z\in \mathrm{Fr}(B_r(z_0))} |f(z)-f(z_0)|\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\pi \max_{z\in \mathrm{Fr}(B_r(z_0))} |f(z)-f(z_0)| \to 0 \quad \text{per } r \to 0
\end{aligned}$$

2.6 Punti singolari. Residui

Prima di studiare le particolarità di alcuni di alcuni punti delle funzioni complesse di variabili complesse, forniamo la seguente definizione per comodità di esposizione.

Definizione 2.19 *Siano $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$. Chiamiamo* palla forata *(o* intorno forato*) di centro z_0 e raggio r, l'insieme*

$$B_r^*(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r\} = B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

□

Definizione 2.20 *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, $f \in H(A)$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Diciamo che z_0 è* punto singolare isolato *per f quando:*

a) $z_0 \notin A$;

b) $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r^*(z_0) \subseteq A$.

Ossia, z_0 è punto isolato di $\mathbb{C} \setminus A$.

I punti singolari isolati possono essere di vari tipi. Analizziamoli.

Definizione 2.21 *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, $f \in H(A)$, z_0 punto singolare isolato per f.*

1) Diciamo che z_0 è punto singolare eliminabile *per f quando esiste $\ell \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) \to \ell$ per $z \to z_0$;*

2) diciamo che z_0 è polo *di ordine k (con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) per f quando esiste $\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $f(z) \sim \frac{\ell}{(z-z_0)^k}$ per $z \to z_0$, cioè $(z-z_0)^k f(z) \to \ell$ per $z \to z_0$;*

3) diciamo che z_0 è punto singolare essenziale *per f quando non è eliminabile e non è un polo.*

Svolgiamo ora alcune considerazioni sui punti 1) e 2) della definizione precedente. Iniziamo con il punto 1) enunciando il seguente teorema.

Teorema 2.22 *Sia A un aperto di $\mathbb{C}$, $f \in H(A)$, z_0 punto singolare eliminabile per f. Allora la funzione $\tilde{f}$ così definita:*

$$\tilde{f} : A \cup \{z_0\} \to \mathbb{C} \qquad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & se\ z \in A \\ \lim_{z \to z_0} f(z) & se\ z = z_0 \end{cases}$$

è olomorfa in $A \cup \{z_0\}$.

Per quanto riguarda il punto 2) vale la seguente osservazione.

Osservazione 2.23 Siano P polinomio in $\mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$. Allora z_0 è polo di ordine k di f se solo se z_0 è uno zero di ordine k di P.

□

Definizione 2.24 *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, γ circuito in A, $f \in H(A)$, z_0 punto singolare isolato per f tale che $z_0 \in L(\gamma)$ e $L(\gamma) \setminus \{z_0\} \subseteq A$. Chiamiamo* residuo *di f in z_0 il numero complesso*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z)\, \mathrm{d}z$$

Teorema 2.25 (dei residui) *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, γ circuito in A, $f \in H(A)$, $z_0, \dots, z_p$ punti singolari isolati per f tali che:*

a) $z_i \in L(\gamma)$ per $i = 0, \dots, p$;

b) $L(\gamma) \setminus \{z_0, \dots, z_p\} \subset A$.

Allora:

$$\int_{\gamma^+} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=0}^{p} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

La dimostrazione di questo teorema è molto agevole per via grafica, ma qui ci limitiamo a svolgerla a parole (per una dimostrazione rigorosa si veda B.Mat, proposizione 4.8-1 pagina 179). Si considerino i circuiti γ_i che contengono al loro interno un unico punto singolare isolato z_i. La somma degli integrali della funzione f sulle curve γ_i è uguale all'integrale iniziale e ogni termine è uguale al residuo della funzione nel punto contenuto all'interno del circuito sul quale stiamo integrando. Un passaggio aiuterà a chiarire il concetto:

$$\int_{\gamma^+} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{i=0}^{p} \int_{\gamma_i^+} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=0}^{p} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

□

Vediamo come calcolare il residuo in un punto singolare eliminabile z_0. Per fare ciò ci serviamo della funzione $\tilde{f}$ definita precedentemente. Allora:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \tilde{f}(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

per il teorema di Cauchy (teorema 2.16).

Se z_0 è invece un polo, doppio, ad esempio, sappiamo che se $f \in H(A)$ esiste $\ell \in \mathbb{C}$ tale che $(z - z_0)^2 f(z) \to \ell$ per $z \to z_0$. Chiamiamo g_2 la funzione $g_2(z) = (z - z_0)^2 f(z)$. Allora $g_2 \in H(A)$ e z_0 sarà un punto singolare eliminabile per g_2. Sia ora $\tilde{g}_2$ il prolungamento olomorfo di g_2. Allora $\tilde{g}_2 \in H(A)$. Possiamo quindi applicare la formula integrale di Cauchy (teorema 2.18):

$$\tilde{g}_2(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{\tilde{g}_2(z)}{z - s} \, \mathrm{d}z$$

Ma sappiamo che:

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\tilde{g}_2(z)}{z - s} = \frac{\tilde{g}_2(z)}{(z - s)^2}$$

e che la precedente funzione integranda è continua come lo è anche la sua derivata. Possiamo allora invertire derivata con integrale ed ottenere:

$$\tilde{g}_2'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{\tilde{g}_2(z)}{(z - s)^2} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z) \, \mathrm{d}z$$

che nel punto z_0 diventa:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_2'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{\tilde{g}_2(z)}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z) \, \mathrm{d}z = \\ &= \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z - z_0)^2 f(z) \right) \end{aligned}$$

La formula può essere generalizzata ad un polo k-plo come segue:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right)$$

□

Un'applicazione del teorema dei residui particolarmente diffusa è legata al calcolo di integrali indefiniti. L'idea che sta alla base di questa applicazione è quella di integrare, anzizhé sull'intervallo $+\infty, -\infty$, su una semicirconferenza di raggio R (composta da un arco lungo πR e da un segmento lungo $2R$, ossia il diametro) e far tendere poi tale raggio a $+\infty$. Il prossimo teorema garantisce che l'integrale calcolato lungo l'arco di semicirconferenza sia nullo. L'integrale rimanente può essere quindi calcolato a partire dai residui della funzione applicando il teorema dei residui.

Teorema 2.26 (Lemma del grande cerchio) *Siano $g \in H(B)$, $z \in B$, $B \supseteq \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq \alpha, \beta \leq \arg(z) \leq \gamma\}$, $g(z) = o(\frac{1}{z})$ per $|z| \to +\infty$. Se $\lambda_R(t) = Re^{it}$ per $\beta \leq t \leq \gamma$, allora:*

$$\int_{\lambda_R} g(z) \, \mathrm{d}z \to 0 \quad \textit{per } R \to +\infty$$

Dimostrazione:

$$\left|\int_{\lambda_R} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \max_{|z|=R} |g| \cdot \text{lunghezza}(\lambda_R) \le \frac{\varepsilon}{R}\cdot 2\pi R = 2\pi\varepsilon$$

Infatti si ha che:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists R_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in B \quad |z| \ge R_\varepsilon \;\Rightarrow\; |g(z)| \le \frac{\varepsilon}{|z|}$$

□

Il lemma che segue, invece, verrà applicato nel capitolo 7 nello studio dell'inversione della trasformata di Laplace applicando la trasformata di Fourier.

Teorema 2.27 (Lemma di Jordan) *Siano $R, \alpha \in \mathbb{R}^+$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$, il settore S così definito:*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \ge R, \theta_1 \le \arg(z) \le \theta_2\}$$

$A \subset S$, $f : A \to \mathbb{C}$ tale che $f \in H(A)$. Se

$$f(z) \to 0 \quad \textit{per } |z| \to +\infty, z \in S$$

allora

$$\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \quad \textit{per } R \to +\infty$$

dove $\gamma_R = Re^{it}$ per $t \in [\theta_1, \theta_2]$.

L'ipotesi che $f(z) \to 0$ assume questo significato:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists R_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in S \quad |z| \ge R_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(z)| \le \varepsilon$$

Per il teorema di Weierstrass $|f|$ ha massimo e sia dunque $M(R) = \max f(Re^{it})$ per $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Per ipotesi, $M(R)$ è infinitesimo all'infinito. Si ha:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\alpha R(\cos t + i\sin t)} f(Re^{it}) iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right| \le \\ &\le R\cdot M(R)\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\alpha R\sin t}\,\mathrm{d}t \le \\ &\le R\cdot M(R)\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin t}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\cdot R\cdot M(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin t}\,\mathrm{d}t \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

Per $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, la funzione seno è concava e crescente, dunque la retta di equazione $y = \frac{2}{\pi}t$ sta sotto il grafico della funzione seno per $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, quindi:

$$0 \le \frac{2}{\pi}t \le \sin t \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Segue:

$$\begin{aligned} 2 \cdot R \cdot M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin t} \, \mathrm{d}t &\leq 2 \cdot R \cdot M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} t} \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \cdot M(R) \left(1 - e^{-\alpha R}\right) \to 0 \quad \text{per } R \to +\infty \end{aligned}$$

Il termine fra parentesi, ottenuto risolvendo l'integrale, tende a 1 e quindi è costante, mentre $M(R)$ tende a zero per ipotesi.

Capitolo 3

Trasformata di Laplace

3.1 Definizione di trasformata di Laplace

Definizione 3.1 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, f continua a tratti. Diciamo che f è* trasformabile secondo Laplace *(o semplicemente $\mathcal{L}$-trasformabile) quando esiste un $s \in \mathbb{C}$ tale che la funzione $e^{-st} f(t)$ sia assolutamente integrabile in senso generalizzato su $[0, +\infty)$. In tal caso chiamiamo* trasformata di Laplace *di f l'integrale*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \,\mathrm{d}t$$

È importante notare che se l'integrale suddetto converge per s_0 (un solo valore dei numeri complessi), allora converge per tutti i punti del semipiano a destra di s_0. Infatti, consideriamo $s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$. Allora:

$$\left|e^{-st} f(t)\right| = \left|e^{-st}\right| |f(t)| = e^{-t \operatorname{Re} s} |f(t)| \leq e^{-t \operatorname{Re} s_0} |f(t)| = \left|e^{-s_0 t} f(t)\right|$$

□

Per comodità di scrittura, presa una funzione $w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiamo la funzione w_+ come segue:

$$w_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad w_+(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} w(t) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

□

Definizione 3.2 *Sia $g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$. Diciamo che g è di tipo* esponenziale *quando esiste $M \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che $\forall t \in [0, +\infty) \quad |g(t)| \leq M e^{ct}$. In tal caso c è detto* tipo *della funzione esponenziale.*

Teorema 3.3 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, f continua a tratti, f di tipo esponenziale c. Allora f è trasformabile secondo Laplace ed esiste $\mathcal{L}[f](s) \quad \forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > c$ almeno.*

Questa condizione sufficiente per l'esistenza della $\mathcal{L}$-trasformata si dimostra considerando che per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > c$

$$\left|e^{-st} f(t)\right| = e^{-t \operatorname{Re} s} |f(t)| \leq e^{-t \operatorname{Re} s} M e^{ct} = M e^{-t((\operatorname{Re} s)-c)}$$

dove $M e^{-t((\operatorname{Re} s)-c)}$ è sicuramente integrabile in senso generalizzato su $[0, +\infty)$.

Definizione 3.4 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, f *continua a tratti. Chiamiamo* ascissa di convergenza *di* f *il valore* $\sigma \in [-\infty, +\infty)$

$$\sigma(f) = \inf \left\{ \operatorname{Re} s, s \in \mathbb{C} : |e^{-st} f(t) \right.$$
$$\left. \textit{è integrabile in senso generalizzato su } [0, +\infty) \right\} \in [-\infty, +\infty)$$

□

Con la trasformata di Laplace, è stato introdotto un nuovo tipo di funzioni: funzioni complesse di una variabile complessa, così definite:

$$\mathcal{L}[f] : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma(f)\} \to \mathbb{C}$$

Contemporaneamente abbiamo introdotto trasformazioni integrali del tipo

$$\mathcal{F}(s) = \int_I k(t, s) f(t) \, \mathrm{d}t$$

e, in particolare, la *trasformazione di Laplace*

$$\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}[f]$$

che è, a tutti gli effetti, una trasformazione lineare.

3.2 Proprietà della trasformata di Laplace

Teorema 3.5 (di linearità) *Siano* f_1, f_2 *funzioni* $\mathcal{L}$*-trasformabili,* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$*. Allora:*

I) $c_1 f_1 + c_2 f_2$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile;*

II) $\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{L}[f_1] + c_2 \mathcal{L}[f_2]$*;*

III) $\sigma(c_1 f_1 + c_2 f_2) \geq \max\{\sigma(f_1), \sigma(f_2)\}$*.*

Siccome le proprietà I) e II) sono banali da verificare in quando derivano immediatamente dalla definizione di trasformata, studiamo il caso III). Posto $s \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} s > \max\{\sigma(f_1), \sigma(f_2)\}$, si ha:

$$\left|e^{-st}(c_1 f_1 + c_2 f_2)\right| \leq e^{-t \operatorname{Re} s} |c_1||f_1| + e^{-t \operatorname{Re} s} |c_2||f_2|$$

che è integrabile in senso generalizzato.

Teorema 3.6 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, f $\mathcal{C}^{(1)}$ *a tratti,* f *continua in* $\mathbb{R}^+$, f, f' $\mathcal{L}$*-trasformabili. Allora:*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t &= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^M + s\int_0^M e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= e^{-sM} f(M) - f(0^+) + s\int_0^M e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \to \\ &\to -f(0^+) + s\mathcal{L}[f](s) \quad \text{per } M \to +\infty\end{aligned}$$

Il termine $e^{-sM} f(M)$ tende a zero in quanto, se $\operatorname{Re} s > c$

$$\begin{aligned}|f(t)| &\leq ke^{ct} \\ \left|e^{-sM} f(M)\right| &\leq ke^{-M \operatorname{Re} s + cM} \to 0 \quad \text{per } M \to +\infty\end{aligned}$$

Teorema 3.7 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, f $\mathcal{C}^{(2)}$ *a tratti,* f *di classe* $\mathcal{C}^{(1)}$ *in* $\mathbb{R}^+$, f, f', f'' $\mathcal{L}$*-trasformabili. Allora:*

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0^+) = s^2\mathcal{L}[f](s) - f'(0^+) - sf(0^+)$$

3.3 Utilizzo della trasformata di Laplace

Studiamo ora alcune applicazioni della trasformata di Laplace. Supponiamo, ad esempio, di voler operare un cambiamento di scala ad una certa funzione f trasformabile secondo Laplace per ottenere un risultato del tipo:

$$g_c(t) = f(ct) \quad \text{per } c \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 3.8 *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *funzione* $\mathcal{L}$*-trasformabile,* $s \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}^+$, $ct = u$, $\operatorname{Re} s > c\sigma(f)$*. Allora:*

$$\int_0^M e^{-st} f(ct)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_0^M e^{-s\frac{u}{c}} f(u)\,\mathrm{d}u \to \frac{1}{c}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{c}\right) \quad \textit{per } M \to +\infty$$

In questo caso, $e^{-s\frac{u}{c}} f(u)$ *è convergente se* $\operatorname{Re} \frac{s}{c} > \sigma(f)$*, ossia* $\operatorname{Re} s > c\sigma(f)$*. Possiamo perciò scrivere la formula del cambiamento di scala:*

$$\mathcal{L}[g_c](s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{c}\right) \quad \operatorname{Re} s > c\sigma(f)$$

$\square$

Proponiamoci ora di effettuare una traslazione della funzione f per ottenere un risultato del tipo:

$$h_{t_0}(t) = f(t - t_0) \quad \text{per } t_0 \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 3.9 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione $\mathcal{L}$-trasformabile, $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \sigma(f)$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $t - t_0 = v$. Allora:*

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-st} f(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \int_{-t_0}^{M-t_0} e^{-s(v+t_0)} f(v)\,\mathrm{d}v &= \\ = e^{-st_0} \int_0^{M-t_0} e^{-sv} f(v)\,\mathrm{d}v &\to \\ \to e^{-st_0}\mathcal{L}[f](s) \quad &\textit{per } M \to +\infty\end{aligned}$$

La formula finale della traslazione è quindi:

$$\mathcal{L}[h_{t_0}](s) = e^{-st_0}\mathcal{L}[f](s) \quad \operatorname{Re} s > \sigma(f)$$

$\square$

Può essere necessario, infine, rendere esponenziale il comportamento di una funzione (ad es. di un segnale se lo si deve "smorzare") ed ottenere quindi una funzione del tipo:

$$k_\alpha(t) = e^{\alpha t} f(t) \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{C}$$

Teorema 3.10 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione $\mathcal{L}$-trasformabile, $s, \alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s-\alpha) > \sigma(f)$. Allora:*

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f](s - \alpha)$$

In questo caso, la formula finale sarà:

$$\mathcal{L}[k_\alpha](s) = \mathcal{L}[f](s - \alpha) \quad \operatorname{Re} s > \sigma(f) + \operatorname{Re}\alpha$$

3.4 Casi particolare di trasformazione secondo Laplace

Può risultare utile calcolare la trasformata di una funzione periodica. Procediamo dunque come segue.

Teorema 3.11 *Siano $T \in \mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione T-periodica. Consideriamo allora la funzione $h(t) = g(t)H(t)$ (dove $H(t)$ è la funzione di Heaviside); essa non può considerarsi propriamente periodica, in quanto è nulla per $t \leq 0$, tuttavia possiamo richiedere che sia $\mathcal{L}$-trasformabile, cioè continua a tratti e di tipo esponenziale. Sappiamo quindi che l'integrale di Laplace della funzione $h(t)$ converge. Perciò, posto $n \in \mathbb{N}$, converge anche la seguente successione per $n \to +\infty$:*

$$\int_0^{nT} e^{-st} h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)T}^{kT} e^{-st} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)T}^{kT} e^{-st} g(t-(k-1)T)\,\mathrm{d}t$$

che ponendo $t - (k-1)T = r$ diventa

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^T e^{-s(r+(k-1)T)} g(r)\,\mathrm{d}r = \sum_{k=1}^{n} e^{-sT(k-1)} \int_0^T e^{-sr} g(r)\,\mathrm{d}r$$

dove il primo termine $\sum_{k=1}^{n} e^{-sT(k-1)}$ può essere facilmente ricondotto ad una serie geometrica di ragione e^{-sT} operando la sostituzione $h = k-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-sT(k-1)} = \sum_{h=0}^{n-1} e^{-sTh} = \sum_{h=0}^{n-1} \left(e^{-sT}\right)^h \to \frac{1}{1-e^{-sT}} \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

La formula finale di trasformazione per una funzione g_T che sia T-periodica è quindi:

$$\mathcal{L}[g_T](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} g_T(t)\,\mathrm{d}t \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

$\square$

Un altro caso di particolare interesse è rappresentato dalla trasformazione della primitiva di una funzione.

Teorema 3.12 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua a tratti e di tipo esponenziale tale che $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$. Definiamo quindi una nuova funzione $F(t)$ come segue:*

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } t \leq 0 \\ \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u & \textit{se } t > 0 \end{cases}$$

La funzione così definita risulta essere $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti. Ricordando che la funzione iniziale $f(t)$ è di tipo esponenziale, possiamo scrivere:

$$|F(t)| \leq \int_0^t |f(u)|\,\mathrm{d}u \leq M \int_0^t e^{cu}\,\mathrm{d}u = \frac{M}{c}\left(e^{ct}-1\right) \leq \frac{M}{c} e^{ct}$$

e ciò prova che anche $F(t)$ è di tipo esponenziale. Possiamo quindi calcolare l'integrale di Laplace di $F(t)$, limitandoci, per ora, a considerare un intervallo compatto e successivamente far tendere il limite superiore a $+\infty$.

Supposto $\operatorname{Re} s \neq 0$ *e applicando due volte il teorema di riduzione per gli integrali doppi si ottiene:*

$$\int_0^y e^{-st}\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^y f(u)\left(\int_u^y e^{-st}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^y f(u)\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_u^y du =$$
$$= \frac{1}{s}\int_0^y e^{-su} f(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{s}e^{-sy}\int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u$$

dove il secondo termine converge a zero per $y \to +\infty$ *se* $\operatorname{Re} s > c$ *come mostra il seguente passaggio:*

$$e^{-sy}\left|\int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq Me^{cy-sy} = Me^{-y(s-c)}$$

La trasformata di Laplace di una primitiva è quindi:

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) \quad \sigma(F) = \max\{0, \sigma(f)\}$$

3.5 Olomorfia della trasformata di Laplace

Lo scopo finale di questo paragrafo è dimostrare che la trasformata di Laplace è una funzione olomorfa. Per raggiungere questo importante risultato, occorre svolgere alcune considerazioni preliminari.

Iniziamo a considerare che la funzione sotto il segno di integrale di Laplace, $e^{-st}f(t)$, è una funzione di due variabili, $f(s,t)$. Poniamo quindi $A \subseteq \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$), $f : A \times [a,b] \to \mathbb{C}$ e chiamiamo $F(s) = \int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}t$. Un primo risultato, che non dimostriamo, è che se $f \in \mathcal{C}(A \times [a,b]; \mathbb{C})$ allora F è continua. Il secondo obiettivo è invece dimostrare che F è derivabile e calcolare il valore della sua derivata.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ $f : A \times [a,b] \to \mathbb{C}$ tale che esiste $\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \quad \forall (s,t) \in A \times [a,b]$ e che $\frac{\partial f}{\partial s} \in \mathcal{C}(A \times [a,b]; \mathbb{C})$, $s_0 \in A$. Calcoliamo il valore della seguente derivata:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{s_0}^s \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b \left(\int_{s_0}^s \frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^b (f(s,t) - f(s_0,t))\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(s_0,t)\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$$

Si noti, infatti, che il termine $\int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}t$ è proprio la $F(s)$, mentre $\int_a^b f(s_0,t)\,\mathrm{d}t$ è un termine costante che ha quindi derivata nulla.

Ora enunciamo un teorema che rientra nell'ambito dei teoremi di convergenza dominata che sarà utile al nostro scopo.

Teorema 3.13 *Siano* I *intervallo non compatto di* $\mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ *(oppure* $\mathbb{C}$*),* $f \in \mathcal{C}(A \times I; \mathbb{C})$. *Se esiste* $\exists g : I \to \mathbb{R}$ *tale che:*

a) $|f(s,t)| \leq g(t) \quad \forall (s,t) \in A \times I$;

b) g è integrabile in senso generalizzato

allora la funzione $F(s) = \int_I f(s,t)\,\mathrm{d}t$ *è continua.*

Questo stesso teorema, può essere enunciato in forma differente:

$$\exists \lim_{s \to s_0} f(s,t) = f_0(t) \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{s \to s_0} F(s) = \int_I f_0(s)\,\mathrm{d}t$$

Sappiamo già che $\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}f(t)\right) = -te^{-st}f(t)$ è continua in $A \times (0, +\infty)$ se lo è f in $(0, +\infty)$. Dimostriamo ora che la trasformata di Laplace di $f(t)$ è continua su tutto il semipiano a destra di $\sigma(f)$. Osserviamo quanto segue:

$$s_0 \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s_0 > \sigma(f), \delta \in \mathbb{R}^+ : \operatorname{Re} s_0 - \delta > \sigma(f), s \in B_\delta(s_0)$$
$$\Downarrow$$
$$\left|e^{-st}f(t)\right| = e^{-t \operatorname{Re} s}|f(t)| \leq e^{-(\operatorname{Re} s_0 - \delta)t}|f(t)|$$

dove l'ultimo termine non dipende più da s e, per le ipotesi fatte, è integrabile in senso generalizzato.

Studiamo ora se esiste il limite $\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} \mathcal{L}[f](s)$. Siano quindi $s_1, \alpha \in \mathbb{R}$, tali che $\operatorname{Re} s > s_1 > \alpha$. Allora:

$$\left|e^{-st}f(t)\right| \leq Me^{-t(\operatorname{Re} s - \alpha)} \leq Me^{-t(s_1 - \alpha)}$$

dove l'ultimo termine è integrabile in senso generalizzato. Possiamo quindi applicare il teorema precedente invertendo il limite con l'integrale e, osservando che $Me^{-t(\operatorname{Re} s - \alpha)} \to 0$ per $\operatorname{Re} s \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$$

Raccogliamo i risultati sinora ottenuti nel seguente teorema.

Teorema 3.14 *Siano I intervallo non compatto di $\mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$), $f \in \mathcal{C}(A \times I; \mathbb{C})$ tale che:*

a) $\exists \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \quad \forall (s,t) \in A \times I$;

b) $\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \in \mathcal{C}(A \times I; \mathbb{C})$

ed esistano $g, h : I \to \mathbb{R}$ tali che:

a) g, h siano integrabili in senso generalizzato;

b) $|f(s,t)| \leq g(t) \quad \forall (s,t) \in A \times I$;

c) $\left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\right| \leq h(t) \quad \forall (s,t) \in A \times I$

allora $F(s) = \int_I f(s,t)\,\mathrm{d}t$ *è derivabile e* $F'(s) = \int_I \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,\mathrm{d}t$.

Rileviamo anche che se $e^{-st}f(t)$ è integrabile in senso generalizzato per quanto dimostrato prima, è integrabile anche la sua derivata $-te^{-st}f(t)$ scegliendo un α' opportuno tale $\alpha' = \alpha + \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Segue quindi il teorema che afferma l'olomorfia della trasformata di Laplace.

Teorema 3.15 *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, f *continua in* $(0, +\infty)$, f *di tipo esponenziale. Allora* $\mathcal{L}[f]$ *è olomorfa in* $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$ *e*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[f](s) = -\int_0^{+\infty} te^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$$

3.6 Antitrasformazione secondo Laplace

Finora abbiamo utilizzato la trasformazione di Laplace per ottenere funzioni trasformate partendo dal dominio delle funzioni "non trasformate". Sarebbe utile uno strumento che consentisse di fare l'operazione opposta e cioè passare da un domino trasformato ad uno non trasformato. Questo è possibile mediante l'antitrasformata di Laplace. Per sfruttare questo metodo è però necessario enunciare un importante teorema.

Teorema 3.16 (di unicità) *Siano* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *funzioni continue a tratti, continue in* $\mathbb{R}^+$, *trasformabili secondo Laplace e tali che* $f(t) = 0$ *e* $g(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$. *Allora:*

$$\begin{gathered} \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g] \\ \Downarrow \\ f = g \end{gathered}$$

Questo teorema ci garantisce quindi, che data una funzione nel dominio trasformato, la sua antitrasformata è unica. Vediamo di applicare questo risultato nell'antitrasformazione di una funzione razionale fratta che rappresenta un caso di grande interesse applicativo. Ricordiamo prima le definizioni di radici semplici e multiple di un polinomio.

Definizione 3.17 *Siano* P *e* Q *polinomi in* $\mathbb{R}$ *(o in* $\mathbb{C}$*)*, $s_0 \in \mathbb{R}$ *(o* $\mathbb{C}$*)*, $k \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. *Diciamo che* s_0 è radice k-pla *di* P *quando* $P(s) = (s-s_0)^k Q(s)$ *per con* $Q(s_0) \neq 0$. *Diciamo che* s_0 *è* radice semplice *di un polinomio* P *quando* $P(s) = (s - s_0)Q(s)$ *con* $Q(s_0) \neq 0$*; ossia quando* $k = 1$. *Se* $k > 1$ *diciamo, in generale, che* s_0 *è una* radice multipla.

È il caso di fare un'interessante osservazione che riguarda le radici semplici. Siccome $P'(s) = Q(s) + (s - s_0)Q'(s)$, segue che, per le radici semplici, si verificano le seguenti equazioni:

$$\begin{gathered} P(s_0) = 0 \\ P'(s_0) = Q(s_0) \neq 0 \end{gathered}$$

Si può facilmente intuire come questo risultato possa essere esteso per radici doppie, triple, ecc.

Teorema 3.18 *Siano P polinomio in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$), $s_0 \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = 0, \ldots, k-1$. s_0 è radice k-pla di P se e solo se:*

$$\begin{cases} P^{(h)}(s_0) = 0 \\ P^{(k)}(s_0) \neq 0 \end{cases}$$

Se per operare l'antitrasformazione di una funzione polinomiale fratta vogliamo scomporla in fratti semplici, ossia nella forma

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - s_i}$$

dove s_i sono tutte radici semplici e dove il grado di Q sia minore di n, possiamo calcolare i termini A_i come segue:

$$\begin{aligned} A_i &= \lim_{s \to s_i} \frac{Q(s)(s - s_i)}{P(s)} = \\ &= \frac{Q(s_i)}{\alpha(s_i - s_1) \ldots (s_i - s_{i-1})(s_i - s_{i+1}) \ldots (s_i - s_n)} = \frac{Q(s_i)}{P'(s_i)} \end{aligned}$$

Concludiamo scrivendo la formula finale compatta per l'antitrasformazione di una funzione polinomiale fratta espressa come sopra (purché il denominatore abbia soltanto radici semplici e grado maggiore del numeratore):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(s_i)}{P(s_i)}\right](t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q(s_i)}{P'(s_i)} e^{s_i t} H(t)$$

□

Nel processo di antitrasformazione sarebbe utile trovare un modo per antitrasformare il prodotto di funzioni. Queste funzioni potrebbero essere, ad esempio, i fattori di un polinomio al denominatore di una certa funzione trasformata. Per fare ciò ci serviamo della convoluzione, definita nel primo capitolo (definizione 1.20).

Teorema 3.19 *Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g continue a tratti tali per cui $f(t) = g(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$ e $|f(t)| \leq k_1 e^{\alpha t}$, $|g(t)| \leq k_2 e^{\beta t}$. Allora $f * g$ è trasformabile secondo Laplace come segue:*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s), \quad \forall s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$$

La dimostrazione di questo teorema è la seguente (si consideri il cambio di variabile $t - v = w$):

$$
\begin{aligned}
&\int_0^M e^{-st}(f * g)\,\mathrm{d}t = \int_0^M e^{-st} \left(\int_0^t f(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}t = \\
&= \int_0^M \left(\int_v^M e^{-st} f(t-v)\,\mathrm{d}t \right) g(v)\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_0^M \left(\int_0^{M-v} e^{-s(w+v)} f(w)\,\mathrm{d}w \right) g(v)\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_0^M e^{-sv} \left(\int_0^{M-v} e^{-sw} f(w)\,\mathrm{d}w \right) g(v)\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_0^M e^{-sv} \left(\int_0^{M} e^{-sw} f(w)\,\mathrm{d}w \right) g(v)\,\mathrm{d}v + \\
&\quad - \int_0^M e^{-sv} \left(\int_{M-v}^{M} e^{-sw} f(w)\,\mathrm{d}w \right) g(v)\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_0^M e^{-sv} g(v)\,\mathrm{d}v \int_0^M e^{-sw} f(w)\,\mathrm{d}w + I(M)
\end{aligned}
$$

Dall'ultima espressione si deduce, quindi, che se il termine $I(M)$ tendesse a zero quando M tende a $+\infty$, la trasformata di una convoluzione si ridurrebbe al prodotto delle trasformate delle funzioni convolute. Così è, infatti:

$$
\begin{aligned}
|I(M)| &\leq \int_0^M e^{-sv} \left(\int_{M-v}^{M} e^{-sw} |f(w)|\,\mathrm{d}w \right) |g(v)|\,\mathrm{d}v \leq \\
&\leq \int_0^M e^{-v \operatorname{Re} s} \left(\int_{M-v}^{M} e^{-w \operatorname{Re} s} |f(w)|\,\mathrm{d}w \right) |g(v)|\,\mathrm{d}v \leq \\
&\leq k_1 \int_0^M e^{-v \operatorname{Re} s} \left(\int_{M-v}^{M} e^{-w(\operatorname{Re} s - \alpha)}\,\mathrm{d}w \right) |g(v)|\,\mathrm{d}v \leq \\
&\leq k_1 \int_0^M v e^{-v \operatorname{Re} s} e^{-(M-v)(\operatorname{Re} s - \alpha)} |g(v)|\,\mathrm{d}v = \\
&= k_1 \int_0^M v e^{-M(\operatorname{Re} s - \alpha) - \alpha v} |g(v)|\,\mathrm{d}v \leq \\
&\leq k_1 k_2 \int_0^M v e^{-M(\operatorname{Re} s - \alpha) - \alpha v + \beta v}\,\mathrm{d}v \leq \\
&\leq k_1 k_2 \int_0^M v e^{-M(\operatorname{Re} s - \alpha) - \alpha v + \beta v}\,\mathrm{d}v \leq \\
&\leq k_1 k_2 e^{-M(\operatorname{Re} s - \alpha)} e^{|\beta - \alpha| M} \frac{M^2}{2} \to 0 \quad \text{per } M \to +\infty
\end{aligned}
$$

3.7 Teoremi del valore iniziale e del valore finale

Enunciamo ora due teoremi che vengono utilizzati in alcuni casi applicativi. Chiamiamo, per comodità di esposizione, $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$.

Teorema 3.20 (del valore iniziale) *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *una funzione continua a tratti e di tipo esponenziale tale che* $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$. *Allora se esiste il limite* $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+)$ *allora:*

$$\exists \lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} sF(s) = f(0^+)$$

Perciò $F(s) \sim \frac{f(0^+)}{s}$ *per* $\operatorname{Re} s \to +\infty$ *se* $f(0^+) \neq 0$, *oppure* $F(s) = o\left(\frac{1}{s}\right)$ *per* $\operatorname{Re} s \to +\infty$ *se* $f(0^+) = 0$ *(cioè* f *è continua in 0).*

Dimostriamo questo teorema con un'ipotesi aggiuntiva per semplificare i calcoli: sia f $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti. Allora:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0^+) \\ \mathcal{L}[f'](s) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow sF(s) \to f(0^+) \quad \text{per } \operatorname{Re} s \to +\infty$$

Teorema 3.21 (del valore finale) *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *una funzione continua a tratti tale che* $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$. *Se esiste il limite* $\lim_{t \to +\infty} f(t) \in \mathbb{C}$ *(e quindi* f *è limitata e* $\sigma(f) \leq 0$*) allora:*

$$\exists \lim_{\operatorname{Re} s \to 0} sF(s) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

Perciò $F(s) \sim \frac{\ell}{s}$ *per* $s \to 0$ *se* $f(t) \to \ell \neq 0$ *per* $t \to +\infty$ *(quindi* 0 *è un polo semplice), oppure* $F(s) = o\left(\frac{1}{s}\right)$ *per* $s \to 0$ *se* $f(t) \to 0$ *per* $t \to +\infty$.

Capitolo 4

Complementi sulle serie

4.1 Convergenza e scambiabilità di passaggi al limite

Definizione 4.1 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}$), $f_k : A \to \mathbb{C}$. Diciamo che f_k converge a f* puntualmente *su A quando $\forall t \in A \quad f_k(t) \to f(t)$ per $k \to +\infty$.*

Ad esempio, posto $A = [0,1]$ e $f_k \in \mathcal{C}(A;\mathbb{C})$ con $f_k(t) = t^k$, si ha che fissato t a 1, $t^k \to 1$ per $k \to +\infty$, mentre $t^k \to 0$ per tutti gli altri $t \in [0,1)$. Perciò:

$$f_k(t) \to f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Dove f non è neppure una funzione continua.

Definizione 4.2 *Siano $B \subseteq \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}$), $f_k : B \to \mathbb{C}$. Se esiste $\|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$, diciamo che f_k converge a f* uniformemente *su B quando $\sup_{t\in B} |f_k(t) - f(t)| \to 0$ per $k \to +\infty$.*

Seguono ora tre importanti teoremi che garantiscono, per certi casi particolari, la scambiabilità di passaggi al limite.

Teorema 4.3 *Siano $\{f_k\}$ una successione di funzioni continue, $f : B \to \mathbb{C}$. $f_k \to f$ uniformemente su $B \Rightarrow f$ è continua in B.*

Teorema 4.4 *Siano $\{f_k\}$ una successione di funzioni derivabili, $f, g : B \to \mathbb{C}$. Se $f_k \to f$ su B e $f_k' \to g$ uniformemente su B allora:*

I) f è derivabile;

II) $f' = g$.

Teorema 4.5 *Siano $\{f_k\}$ una successione di funzioni $f_k : [a,b] \to \mathbb{C}$, f_k continua a tratti, $f : B \to \mathbb{C}$. $f_k \to f$ uniformemente su $B \Rightarrow \int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Per esempio, per il teorema 4.3 si ha:

$$f(c) = \lim_{t \to c} f(t) = \lim_{t \to c} \lim_{k \to +\infty} f_k(t) = \lim_{k \to +\infty} \lim_{t \to c} f_k(t) = \lim_{k \to +\infty} f_k(c) = f(c)$$

4.2 Serie di funzioni

Sia ora $\{f_k\}$ una successione di funzioni $f_k : A \to \mathbb{C}$. Se definiamo le seguenti somme parziali:

$$\begin{aligned} s_0 &= f_0 \\ s_1 &= s_0 + f_1 \\ s_2 &= s_1 + f_2 \\ &\vdots \\ s_{n+1} &= s_n + f_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

possiamo facilmente definire $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ come somma di funzioni. In analogia con quanto detto nel paragrafo precedente nelle definizioni 4.1 e 4.2 si ha che questa converge puntualmente se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ converge per ogni t; converge uniformemente a g su A quando $\sup_{t \in A} |\sum_{k=0}^{n} f_k(t) - g(t)| \to 0$ per $n \to +\infty$.

Il prossimo teorema è uno strumento utile per determinare la convergenza uniforme delle serie di funzioni.

Teorema 4.6 (Criterio di Weierstrass) *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie di funzioni $f_n : A \to \mathbb{C}$. Se $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : \sup_{t \in A} |f_n(t)| \le a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su A.*

È possibile verificare, ad esempio, che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, per $z \in \mathbb{C}$, converge sulla palla aperta unitaria ma non sulla palla chiusa unitaria. Ossia converge se $z \in \overline{B_r(0)}$ con $r \in (0,1)$ estremi esclusi. Infatti una serie geometrica di ragione r converge solo se $|r| < 1$.

Un altro esempio può essere la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n^2}$ che si può ricondurre alla serie armonica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente e pertanto la serie di partenza è convergente uniformemente. Infatti $\frac{1}{n^2} = \left|\frac{e^{int}}{n^2}\right|$.

Un ultimo esempio è la serie esponenziale complessa $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ che converge puntualmente in $\mathbb{C}$ ma uniformemente solo su $B_r(0)$ con $r \in \mathbb{R}^+$. Infatti per n fissato $\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|z|^n}{n!} = +\infty$.

4.3 Serie di potenze

Definizione 4.7 *Siano $\{a_n\}$ successione in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Chiamiamo* serie di potenze *di punto iniziale z_0 una serie di funzioni del tipo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Quasi sempre, per semplicità di calcoli, utilizzeremo serie di potenze di punto iniziale 0. Tuttavia, i ragionamenti che seguono possono sempre essere estesi per punti iniziali arbitrari.

Teorema 4.8 (Lemma di Abel) *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *una serie di potenze. Allora:*

I) $z_1 \neq 0, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$ *converge* $\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_1|$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge;*

II) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_2^n$ *non converge* $\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > |z_2|$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *non converge.*

Dimostriamo il primo enunciato. Se $z = 0$ naturalmente la serie converge. Se invece $0 < |z| < |z_1|$ si ha:

$$|a_n z^n| = \left| a_n \frac{z^n}{z_1^n} z_1^n \right| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq L \left| \frac{z}{z_1} \right|^n$$

Infatti, il termine $|a_n z_1^n|$ tende a zero, mentre $\left| \frac{z}{z_1} \right|^n$ converge perché è geometrica di ragione < 1. Dunque la serie di partenza converge assolutamente.

Osservazione 4.9 Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, si presenta solo uno dei seguenti casi:

1) $\forall z \in \mathbb{C}$ la serie converge;

2) la serie converge $\Leftrightarrow$ $z = z_0$;

3) $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in B_r(z_0)$ la serie converge e $\forall w \notin \overline{B_r(z_0)}$ la serie non converge.

Dimostriamo il punto 3). Esso equivale a dire che

$$\left\{ b \in \mathbb{R}^+ : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b^n \text{ converge} \right\} \neq \varnothing$$

ed in più, per il lemma di Abel, si ha:

$$\exists \sup \left\{ b \in \mathbb{R}^+ : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b^n \text{ converge} \right\} = r$$

Dunque per $|s| < r$ la serie converge, mentre se convergesse anche per $|w| > r$, convergerebbe anche al di fuori della palla suddetta, contraddicendo la definizione di estremo superiore. Si noti che nulla sappiamo di quando avviene sulla frontiera della palla.

Chiamiamo quindi r *raggio di convergenza* della serie. Perciò, in riferimento hai casi precedenti si ha:

1) $r = +\infty$;

2) $r = 0$;

3) $r \in (0, +\infty)$.

$\square$

Studiamo ora la convergenza uniforme delle serie di potenze.

Teorema 4.10 *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *una serie di potenze. Allora:*

I) se $r = +\infty \;\Rightarrow\; \forall r \in \mathbb{R}^+ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge uniformemente su* $\overline{B_r(z_0)}$*;*

II) se $r \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; \forall s \in (0, r) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge uniformemente su* $\overline{B_s(z_0)}$*.*

Possiamo anche chiederci se una serie di potenze sia olomorfa nel proprio cerchio di convergenza. Vale quindi il seguente teorema.

Teorema 4.11 *Sia* $a_n(z - z_0)^n$ *una funzione olomorfa su* $\mathbb{C}$ *(*$a_n(z - z_0)^n \in H(\mathbb{C})$*), sappiamo quindi che è anche continua. Allora:*

I) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *è continua nel cerchio aperto;*

II) la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ *è una serie di potenze ed ha raggio di convergenza uguale alla serie di partenza.*

Segue quindi che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ *è olomorfa.*

Prendiamo come esempio la funzione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(s)}{s - z} \, \mathrm{d}s$$

con $L(\gamma) \subseteq \mathrm{dom}(f)$, $z \in L(\gamma)$ e $z \neq z_0$. Allora possiamo scrivere:

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}} = \frac{1}{s - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^n$$

Infatti la ragione della serie geometrica sopra indicata per le ipotesi fatte è < 1 e quindi converge. Dunque si ha:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(s) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma^+} f(s) \frac{1}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s \right) (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Dove il raggio di convergenza è $+\infty$ in quando la funzione è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

4.4 Funzioni analitiche

Definizione 4.12 *Siano A un aperto di $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$. Diciamo che f è* analitica *quando $\forall z_0 \in A \quad \exists U_{z_0}$ intorno di z_0 tale che $\forall z \in U_{z_0}$, si ha:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

con raggio di convergenza la distanza di z_0 dalla frontiera di A e dove

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Per esempio, l'esponenziale complesso definito come

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Risulta essere una funzioni analitica in $\mathbb{C}$.

Non possiamo dire altrettanto di un qualsiasi polinomio di Taylor sviluppato con il resto secondo Peano, infatti se $f \in \mathcal{C}^{(n)}(I; \mathbb{R}), x_0 \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ non ha raggio di convergenza positivo né ha per somma $f(x)$ in un intorno di x_0.

Infine, consideriamo la seguente funzione che è $\mathcal{C}^{(\infty)}$ ma non analitica:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Quindi, mentre in campo complesso la semplice olomorfia implica l'analiticità delle funzioni, nel campo reale non si può dire altrettanto.

Definizione 4.13 *Siano I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(I; \mathbb{R})$. Allora f è* analitica reale *in un intorno U_{x_0} di x_0 se e solo se*

$$R_{n,x_0}(x) \to 0 \quad \textit{per } n \to +\infty \quad \forall x \in U_{x_0}$$

dove $R_{n,x_0}(x)$ è il resto della funzione nella formula di Taylor di ordine n.

Come esempio si può prendere l'esponenziale reale e verificare che il suo resto secondo Lagrange $R_{n,x_0}(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ (con $0 < c < x$) tende a zero svolgendo le dovute maggiorazioni.

È anche possibile verificare, per esercizio, che:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

con raggio di convergenza $+\infty$.

□

Definizione 4.14 *Siano* $f \in H(A)$*,* $z_0 \in A$*,* $f(z_0) = 0$*,* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. Diciamo che* z_0 *è uno* zero di ordine k *di* f *quando* $\exists U_{z_0}$ *intorno di* z_0 *tale che* $\forall z \in U_{z_0}$*, si ha:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+k} = (z - z_0)^k h(z)$$

con $h(z)$ *olomorfa e* $h(z_0) \neq 0$*, ossia se e solo se* $f^{(p)}(z_0) = 0$ *per* $p = 0, \ldots, k-1$.

Concludiamo con un'osservazione che sfrutta questa definizione.

Osservazione 4.15 Se f è olomorfa, allora $\frac{1}{f}$ è olomorfa e i suoi punti singolari (che sono gli zeri di f) sono tutti poli o, al più, punti singolari eliminabili.

Capitolo 5

Spazi vettoriali

5.1 Norme

Definizione 5.1 *Sia* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. *Si chiama* norma *una corrispondenza* $\boldsymbol{a} \mapsto |\boldsymbol{a}|$ *da* V *a* $\mathbb{R}$ *tale che:*

1) $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \quad |\boldsymbol{a}| \geq 0, \quad \boldsymbol{a} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$*;*

2) $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad |\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$*;*

3) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \in \mathbb{R}^n \quad |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Siano $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{C}$ per $i = 1, \ldots, n$. Allora si considerino le norme:

$$|\boldsymbol{\alpha}|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \qquad |\boldsymbol{\alpha}|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2} \qquad |\boldsymbol{\alpha}|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\alpha_i|, i = 1, \ldots, n\}$$

È facile verificare che tutte e tre queste norme verificano le condizioni espresse nella definizione. In particolare per la norma 1 si può verificare la disuguaglianza triangolare come segue:

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|) = |\boldsymbol{a}|_1 + |\boldsymbol{b}|_1$$

Si noti che:

$$|a_i| = \sqrt{a_i^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \quad \Rightarrow \quad \max\{|a_i|, i = 1, \ldots, n\} \leq |\boldsymbol{a}|_2$$

ed inoltre:

$$|\boldsymbol{a}|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2} = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}|_\infty = n \cdot |\boldsymbol{a}|_\infty$$

Dalle due precedenti osservazioni segue quindi che:

$$|\boldsymbol{a}|_\infty \leq |\boldsymbol{a}|_2 \leq |\boldsymbol{a}|_1 \leq n|\boldsymbol{a}|_\infty$$

5.2 Spazi vettoriali normati

Definizione 5.2 *Siano V uno spazio vettoriale, $\{\boldsymbol{a}_n\}$ successione in V, $\boldsymbol{a} \in V$ e sia $\|\cdot\|$ la norma in V. Diciamo che $\boldsymbol{a}_n$ tende ad $\boldsymbol{a}$ quando $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| \to 0$ per $n \to +\infty$.*

Può essere a questo punto interessante rappresentare sul piano le palle unitarie definite secondo le varie norme. In altre parole, considerando un vettore $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ disegnare sul piano $\mathbb{R}^2$ $|\boldsymbol{a}|_1$, $|\boldsymbol{a}|_2$, $|\boldsymbol{a}|_\infty$, ecc. A tal proposito si guardi B.MAT, esempio 1.2-9 pagina 11 e figura 1.2-5 pagina 13.

Definizione 5.3 *Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Diciamo che V ha dimensione ∞ quando $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, esistono $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ linearmente indipendenti.*

Alcuni esempi di spazi vettoriali di dimensione infinita possono essere:

- $S = \{\{a_n\} : \{a_n\}$ è una successione in $\}$;
- $C_0 = \{\{a_n\}$ successione in $\mathbb{C} : a_n \to 0\}$.

Consideriamo ora la successione $\{\boldsymbol{e}_n\}$ definita come segue:

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{e}_n\} &= \{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots\} = \\ &= \{(a_{00}, a_{01}, a_{02}, \ldots), (a_{10}, a_{11}, a_{12}, \ldots), (a_{20}, a_{21}, a_{22}, \ldots), \ldots\}\end{aligned}$$

dove

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

perciò si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_0 &= 1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots \\ \boldsymbol{e}_1 &= 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots \\ \boldsymbol{e}_2 &= 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots \\ \boldsymbol{e}_3 &= 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots \\ &\vdots\end{aligned}$$

Anche in questo caso è possibile dimostrare che i vettori sono linearmente indipendenti e costituiscono quindi uno spazio di dimensione infinita.

□

Consideriamo ora $\{a_n\}$ successione in $\mathbb{C}$ tale per cui $a_n \to 0$. Possiamo definire:

$$\|\{a_n\}\|_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

$$\|\{a_n\}\|_2 \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}$$

$$\|\{a_n\}\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

Definiamo inoltre:

$$\ell^1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{a_n\} : \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \right\}$$
$$\ell^2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{a_n\} : \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \text{ converge} \right\}$$

Perciò se $\{a_n\} \in \ell^1$ allora $a_n \to 0$ per la condizione necessaria di convergenza. Inoltre, siccome $|a_n| \leq 1$ definitivamente, anche $|a_n|^2 \leq |a_n|$ tende a zero definitivamente. Segue che $\ell^1 \subset \ell^2$. Infatti, prendiamo la successione $\{\frac{1}{n}\}$: essa appartiene a $\ell^2 \setminus \ell^1$ poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, ma $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ no.

Osserviamo un'altra relazione: se $\{a_n\} \in \ell^2$ allora $\|\{a_n\}\|_1 \geq \|\{a_n\}\|_2$. Infatti:

$$\|\{a_n\}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2} \leq \sum_{k=0}^{p-1} \sqrt{|a_k|^2} + \sum_{k=p}^{+\infty} |a_k| \leq \|\{a_n\}\|_1$$

□

Un nuovo esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita può essere l'insieme delle funzioni continue $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{C})$. Considerando $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{C})$ possiamo definire le seguenti norme:

$$\|f\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \qquad \|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{[a,b]} |f|$$

È facile verificare che tutte e tre verificano le proprietà della norma.

Un altro esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita è l'insieme delle funzioni polinomiali $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots$; la loro lineare indipendenza è di facile verifica.

5.3 Spazi vettoriali con prodotto scalare

L'operazione di prodotto scalare nell'insieme $\mathbb{R}^n$ è nota e qui la ricordiamo soltanto:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Non conosciamo, invece, un operazione analoga in campo complesso che definiamo quindi come segue.

Definizione 5.4 *Siano $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ tali che $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Definiamo* prodotto scalare *il numero complesso:*

$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i$$

Esso possiede tutte le proprietà del prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$ ed in più è simmetrico.

Definizione 5.5 *Sia V uno spazio vettoriale complesso. Una funzione $a : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice* prodotto scalare *se verifica le proprietà:*

1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V \quad a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$*;*

2) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$*;*

3) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \quad a(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$*;*

4) $\forall \boldsymbol{x} \in V \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Per dimostrare la 2) osserviamo che:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\bar{x}_i \, \bar{\bar{y}}_i} = \overline{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}}$$

Dalla 1) invece segue che

$$a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \overline{a(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} = \overline{a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} + \overline{a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})} = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

Dalla 3) segue:

$$a(\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = \overline{a(\lambda \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{\lambda a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \bar{\lambda} a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

□

D'ora in avanti utilizzeremo la seguente notazione per indicare un prodotto scalare sullo spazio vettoriale V:

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \stackrel{\text{def}}{=} a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Osservazione 5.6 Il prodotto scalare così definito verifica la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \le \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

□

Osserviamo che alcune norme derivano da un prodotto scalare e altre no. Ad esempio, in $\mathbb{R}^n$ le norme 1 e ∞ non derivano da prodotto scalare mentre la norma 2 deriva da prodotto scalare anche in $\mathbb{C}^2$. In ℓ^2 (come definito precedentemente) la norma 2 deriva da prodotto scalare mentre in ℓ^1 e ℓ^∞ le norme non dipendono da prodotti scalari.

Consideriamo ora il caso delle funzioni continue $f, g \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{C})$. Il prodotto scalare è dato da:

$$(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t$$

Dunque norma 1 e norma ∞ non derivano da prodotto scalare, mentre la norma 2 sì, infatti:

$$(f|f) = \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|_2^2$$

5.4 Ortogonalità

Definizione 5.7 *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Una famiglia di vettori non nulli $\{\boldsymbol{e}_n\}$ si dice* ortogonale *se i vettori che la compongono sono due a due ortogonali, ossia:*

$$\forall k, h \in \mathbb{N}, k \neq h \quad (\{\boldsymbol{e}_k\}|\{\boldsymbol{e}_h\}) = 0$$

Di più, si dice ortonormale *se*

$$(\{\boldsymbol{e}_k\}|\{\boldsymbol{e}_h\}) = \delta_k^h = \begin{cases} 1 & se\ k = h \\ 0 & se\ k \neq h \end{cases}$$

Dove δ_k^h è chiamato simbolo di Kronecker ed è definito come sopra indicato.

Può ora risultare interessante verificare che nell'insieme $\mathcal{C}([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ la famiglia di funzioni $t \mapsto e^{ikt}$, con $k \in \mathbb{Z}$ è non solo ortogonale ma anche ortonormale.

Osservazione 5.8 Siano V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, V_p sottospazio di V generato da $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ vettori ortonormali di V, $\boldsymbol{y} \in V_p$. Allora $\boldsymbol{y}$ può essere scritto come combinazione lineare dei precedenti:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{p} c_k \boldsymbol{e}_k$$

Di più, per $h = 1, \ldots, p$:

$$(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{e}_h) = \left(\sum_{k=1}^{p} c_k \boldsymbol{e}_k \middle| \boldsymbol{e}_h \right) = \sum_{k=1}^{p} c_k (\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{e}_h) = c_k \delta_{kh} = c_h$$

Quindi abbiamo:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{p} (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{e}_k) \boldsymbol{e}_k$$

Osservazione 5.9 Siano V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, V_p sottospazio di V generato da $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_p$ vettori ortogonali di V, $\boldsymbol{y} \in V_p$. Allora $\boldsymbol{y}$ può essere scritto come combinazione lineare dei precedenti:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{p} d_k \boldsymbol{w}_k$$

Di più, per $h = 1, \ldots, p$;

$$(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}_h) = \left(\sum_{k=1}^{p} d_k \boldsymbol{w}_k \middle| \boldsymbol{w}_h \right) = \sum_{k=1}^{p} d_k (\boldsymbol{w}_k|\boldsymbol{w}_h) = d_k \delta_{kh} |\boldsymbol{w}_h|^2 = d_h |\boldsymbol{w}_h|$$

Teorema 5.10 (di Pitagora) *Siano V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ vettori ortogonali. Allora:*

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \\ &= (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

5.5 Confronto tra spazi vettoriali

Analizziamo dapprima tre tipicità degli spazi vettoriali di dimensione finita:

1) due norme sono equivalenti (per la definizione di "equivalenza" si veda B.MAT, definizione 1.2-4 pagina 13);

2) se V e W sono spazi di dimensione finita e T è una trasformazione lineare da V a W, allora T è continua;

3) se Z è un sottospazio di V, allora Z è un sottospazio chiuso.

Ora studiamo, invece, quanto avviene negli spazi di dimensione infinita nelle medesime situazioni:

1) due norme possono non essere equivalenti;

2) esistono trasformazioni lineari non continue;

3) esistono sottospazi non chiusi.

Un esempio per il punto 2) in dimensione infinita: si prendano gli spazi $V \in \mathcal{C}^{(1)}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ e $W \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ munito di $\|\cdot\|_\infty$. Allora la trasformazione lineare $D : V \to W$ tale per cui se $f \in V$, $Df = f'$ non è necessariamente continua. Si prenda, ad esempio, $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$ per verificare quanto detto.

Per fornire un esempio del punto 3) in dimensione infinita, con le stesse ipotesi dell'esempio precedente, si prenda la funzione $g_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$. Si può verificare che essa converge sia puntualmente che uniformemente a $|t|$ che, tuttavia, non è di classe $\mathcal{C}^{(1)}$ e quindi non appartiene al sottospazio di $g_n(t)$.

□

Forniamo ora alcune definizioni che saranno necessarie fra poco.

Definizione 5.11 *Siano $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato, $\{\boldsymbol{a}_n\}$ successione in V. Diciamo che $\{\boldsymbol{a}_n\}$ è una* successione di Cauchy *quando si ha:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m,n \in \mathbb{N} \quad m > p_\varepsilon, n > p_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m\| \leq \varepsilon$$

Definizione 5.12 *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Diciamo che V è* completo *quando ogni successione di Cauchy in V converge a un elemento di V.*

Osservazione 5.13 In $\mathbb{R}$ sussiste l'importante proprietà di *completezza* che invece non ha valore in $\mathbb{Q}$. Essa si può riassumere nei seguenti punti equivalenti:

i) se $B \neq \varnothing$, $B \subset \mathbb{R}$ e B è superiormente limitato, allora esiste l'estremo superiore di B;

ii) se $\{a_n\}$ è una successione crescente in $\mathbb{R}$ e $\{a_n\}$ è superiormente limitata, allora essa ha limite reale;

iii) tutte le successioni di Cauchy sono convergenti.

Definizione 5.14 *Uno spazio vettoriale normato completo si dice* spazio di Banach. *Uno spazio vettoriale con prodotto scalare completo si chiama* spazio di Hilbert.

Teorema 5.15 *Siano V uno spazio di Banach, W un sottospazio di V. Allora W è sottospazio vettoriale di Banach se e solo se W è un sottospazio chiuso.*

□

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare un teorema incontrato nel corso di Analisi matematica L-B.

Teorema 5.16 *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$). Allora se tale serie è assolutamente convergente, è anche convergente.*

Per la dimostrazione è quindi sufficiente mostrare che tale serie è una serie di Cauchy. Quindi, per $n > m$ si ha:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{h=0}^{m} a_h\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| =$$
$$= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| + \sum_{k=0}^{m} |a_k| - \sum_{k=0}^{m} |a_k| = \left|\sum_{k=0}^{n} |a_k| - \sum_{k=0}^{m} |a_k|\right| \leq \varepsilon$$

per n e m sufficientemente grandi.

5.6 Proiezioni ortogonali

Consideriamo uno spazio euclideo di 3 dimensioni, $\mathbb{R}^3$. Sappiamo dalle geometria elementare che la distanza fra un punto $\boldsymbol{w}$ appartenente ad un piano W e un punto $\boldsymbol{x}$ non appartenente al piano è minima se il punto $\boldsymbol{w}$ è la *proiezione ortogonale* di $\boldsymbol{x}$ su W. Inoltre, la distanza del punto $\boldsymbol{w}$ dall'origine è minore o uguale della distanza del punto $\boldsymbol{x}$ dall'origine.

Nel seguito, per comodità di esposizione, utilizzeremo sempre le seguenti notazioni. Siano V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ vettori ortonormali di V, V_n il sottospazio generato dai vettori $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, $\|\cdot\|$ la norma in V definita dal prodotto scalare.

Teorema 5.17 (della proiezione ortogonale) *Sia $\boldsymbol{x} \in V$. Allora esiste un unico vettore $\boldsymbol{y}_n \in V_n$ tale che:*

I) $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_n\| = \min\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : \boldsymbol{y} \in V_n\}$;

II) $\boldsymbol{y}_n = \sum_{k=1}^n (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$;

III) $\|\boldsymbol{y}_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2$;

IV) $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_n$ *è ortogonale a* V_n.

Dimostrazione dei punti I) e II). Sia $\boldsymbol{y} \in V_n$, allora $\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^n d_k\boldsymbol{e}_k$. Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \left(\boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^n d_k\boldsymbol{e}_k \,\middle|\, \boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^n d_k\boldsymbol{e}_k\right) = \\
&= \left(\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^n d_k\boldsymbol{e}_k\right) - \sum_{k=1}^n d_k \left(\boldsymbol{e}_k \,\middle|\, \boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^n d_k\boldsymbol{e}_k\right) = \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n \bar{d}_k(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k) - \sum_{k=1}^n d_k(\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{x}) + \sum_{h,k=1}^n d_k\bar{d}_h(\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{e}_h)
\end{aligned}$$

Notiamo che $(\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{e}_h)$ è δ_{hk}. Possiamo poi aggiungere e togliere $\sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)|^2$ e ottenere:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)|^2 + \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_h)|^2 - \sum_{k=1}^n \bar{d}_k(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k) - \sum_{k=1}^n d_k\overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)} + \sum_{k=1}^n |d_k|^2\right) = \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_h)|^2 + \sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k) - d_k|^2
\end{aligned}$$

Segue che $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ è minima se e solo se $d_k = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)$ con $k = 1, \ldots, n$. Ciò prova i punti I) e II).

Il punto III) si dimostra utilizzando il teorema di Pitagora. Ponendo $\boldsymbol{y}_n = \sum_{k=1}^n (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k$, si ha:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_n\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)|^2 \geq 0 \\
\|\boldsymbol{y}_n\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^n (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k) \,\middle|\, \sum_{k=1}^n (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)\right) = \\
&= \sum_{k,h=1}^n (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)\overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_h)}(\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{e}_h) = \\
&= \sum_{k=1}^n |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2
\end{aligned}$$

Per il punto IV) è sufficiente provare il prodotto scalare di $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_n$ con $\boldsymbol{e}_h$ è nullo per $h=1,\dots,n$.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_n|\,\boldsymbol{e}_h) &= \left(\boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k \,\middle|\, \boldsymbol{e}_h\right) = \\
&= (\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{e}_h) - \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{e}_h) = \\
&= (\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{e}_h) - (\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{e}_h) = 0
\end{aligned}
$$

e questo conclude la dimostrazione.

Osservazione 5.18 Il teorema può essere esteso nel caso in cui vi siano $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n$ vettori ortogonale (e non ortonormali). In questo caso, rimangono validi gli stessi risultati ma con le seguenti modifiche:

1) $\boldsymbol{y}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{w}_k)}{\|\boldsymbol{w}_k\|^2}\boldsymbol{w}_k$;

2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{w}_k)|^2}{\|\boldsymbol{w}_k\|^2}\le\|\boldsymbol{x}\|^2$.

Teorema 5.19 (Disuguaglianza di Bessel) *Siano V uno spazio vettoriale con prodotto scalare di dimensione infinita, $\{\boldsymbol{e}_n\}$ una successione in V di vettori due a due ortonormali, $\boldsymbol{x}\in V$. Siccome*

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists \boldsymbol{y}_n\in V_n : \|\boldsymbol{y}_n\|^2=\sum_{k=1}^{n}|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_k)|^2\le\|\boldsymbol{x}\|^2$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_n)|^2$ converge e

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_n)|^2\le\|\boldsymbol{x}\|^2$$

5.7 Sistemi di vettori ortogonali

Definizione 5.20 *Siano V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, $\{\boldsymbol{e}_n\}$ una successione di vettori ortogonali in V, $\boldsymbol{z}\in V$. Si dice la la successione $\{\boldsymbol{e}_n\}$* è totale *in V quando:*

$$(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{e}_n)=0\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$$

Teorema 5.21 *Siano V uno spazio vettoriale con prodotto scalare, $\{\boldsymbol{e}_n\}$ una successione di vettori ortonormali in V, $\boldsymbol{x}\in V$, $c_n=(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_n)$ per $n\in\mathbb{N}$. Allora sono equivalenti:*

i) $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{x}$ *(cioè* $\|\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\boldsymbol{e}_n-\boldsymbol{x}\|\to 0$*);*

ii) $\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2$.

Di più, se i punti i) e ii) valgono $\forall \boldsymbol{x} \in V$, allora la successione $\{\boldsymbol{e}_n\}$ è totale.

Viceversa, se V è uno spazio di Hilbert e la successione $\{\boldsymbol{e}_n\}$ è totale, allora valgono anche i) e ii) $\forall \boldsymbol{x} \in V$.

In questo caso, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \boldsymbol{e}_n$ è la serie di Fourier di $\boldsymbol{x}$ rispetto al sistema ortonormale totale $\{\boldsymbol{e}_n\}$ e i coefficienti c_n sono i coefficienti di Fourier, come verrà descritto nel prossimo capitolo.

□

Enunciamo ora un teorema che in parte riprende quando già affermato e che sarà utile nel seguito.

Teorema 5.22 (di Riesz-Fischer) *Siano V uno spazio di Hilbert, $\{\boldsymbol{e}_n\}$ una successione di vettori ortonormali in V, $\{c_n\}$ una successione in ℓ^2 (ℓ^2 è stato definito nel paragrafo 5.2). Allora esiste $\boldsymbol{x} \in V$ tale che:*

I) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{x}$;

II) $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_n) = c_n$;

III) $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$ *(conosciuta come* identità di Parseval*).*

Per dimostrare il punto I) occorre mostrare che $\boldsymbol{s}_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \boldsymbol{e}_k$ è di Cauchy. Pertanto, per $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$\|\boldsymbol{s}_{n+p} - \boldsymbol{s}_n\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n+p} c_k \boldsymbol{e}_k - \sum_{k=0}^{n} c_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 \leq$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 = \sum_{k=0}^{n+p} |c_k|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Per dimostrare il punto II) procediamo come segue considerando una nuova somma parziale $\boldsymbol{s}_m$ che sappiamo tendere a $\boldsymbol{x}$:

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{s}_m + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_m)|\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{e}_n) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_m|\boldsymbol{e}_n) = \left(\sum_{k=0}^{m} c_k \boldsymbol{e}_k \middle| \boldsymbol{e}_n \right) = c_n$$

Per il punto III): $\boldsymbol{s}_n$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{x}$ sul sottospazio vettoriale generato da $\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ e $(\boldsymbol{s}_n|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n) = 0$. Perciò:

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n) + \boldsymbol{s}_n\|^2 = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n)\|^2 + \|\boldsymbol{s}_n\|^2$$
$$\|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n)\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{s}_n\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Capitolo 6

Serie di Fourier

6.1 Coefficienti di Fourier

Consideriamo la famiglia di funzioni esponenziali $t \mapsto e^{ikt}$, con $k \in \mathbb{Z}$, che sappiamo essere 2π-periodiche, e studiamo la seguente serie:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$$

Per $k \in \mathbb{Z}$ abbiamo:

$$x(t) \cdot e^{-ikt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n-k)t}$$

$$(x|e^{ikt}) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt} \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n-k)t} \,\mathrm{d}t$$

Possiamo scambiare integrale con sommatoria e ottenere:

$$(x|e^{ikt}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \delta_{nk} = 2\pi c_k$$

Dove abbiamo fatto uso del simbolo di Kronecker già definito nel paragrafo 5.4.

Definiamo quindi *coefficiente di Fourier* il numero:

$$c_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt} \,\mathrm{d}t$$

□

Finora abbiamo trattato funzioni 2π-periodiche, ma possiamo facilmente estendere le considerazioni svolte per funzioni T-periodiche, infatti la famiglia di funzioni $t \mapsto e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono ora T-periodiche. Ripetendo il calcolo precedente si ottiene:

$$\int_0^T x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n T \delta_{nk} = T c_k$$

Per le funzioni T-periodiche il coefficiente di Fourier vale quindi:

$$c_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}(x|e^{i\frac{2\pi}{T}kt}) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\,\mathrm{d}t$$

Teorema 6.1 *Siano $a \in \mathbb{R}$, x funzione T-periodica e continua a tratti. Allora:*

$$\int_a^{a+T} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t$$

Possiamo dimostrare questo teorema di due passaggi:

1) se $a = kT$, $k \in \mathbb{N}$, si ha (con il cambio di variabile $s = t - kT$):

$$\int_{kT}^{(k+1)T} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T x(s+kT)\,\mathrm{d}s$$

2) se invece $a \in \mathbb{R}$, possiamo dividere l'integrale come segue:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} x(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^{(k+1)T} x(t)\,\mathrm{d}t + \int_{(k+1)T}^{a+T} x(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^{(k+1)T} x(t)\,\mathrm{d}t + \int_{kT}^{a} x(s+T)\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_a^{(k+1)T} x(s)\,\mathrm{d}s + \int_{kT}^{a} x(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_{kT}^{(k+1)T} x(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

e ricondurci al punto 1).

□

Sappiamo che l'esponenziale complesso $e^{i\alpha t}$ può essere scritto nella forma $\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)$. Dunque, per simmetria del coseno, abbiamo $e^{-i\alpha t} = \cos(\alpha t) - i\sin(\alpha t)$. Questo tornerà utile fra poco.

Studiamo la seguente espressione (con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$):

$$c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + c_{-n}e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} = (c_n + c_{-n})\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + (c_n - c_{-n})\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Se definiamo:

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

si ottiene:

$$c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + c_{-n}e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} = a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Per $n = 0$ si ha:

$$a_0 = 2c_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t$$

mentre per $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\mathrm{d}t$$

Troviamo, infine, le relazioni:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$\square$

Possiamo provare ad applicare le formule precedenti anche a funzioni reali di una variabile reale. Supposto quindi $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \overline{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{d}t} = \overline{\frac{1}{T}\int_0^T \overline{\overline{x(t)e^{i\frac{2\pi}{T}nt}}}\,\mathrm{d}t} = \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{x(t)}e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,\mathrm{d}t = \bar{c}_n \end{aligned}$$

Segue che, per x funzione reale e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + \bar{c}_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n \in \mathbb{R} \\ b_n &= i(c_n - \bar{c}_n) = i \cdot 2i\,\mathrm{Im}\,c_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6.2 Espressioni della serie di Fourier

Riassumiamo in due espressioni importantissime l'utilità dei coefficienti oggetto del paragrafo precedente.

Definizione 6.2 *Chiamiamo* serie di Fourier in forma complessa *la serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

Chiamiamo serie di Fourier in forma reale *la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Il nesso, che può apparire non chiaro a prima vista, tra la prima e la seconda formulazione della serie di Fourier è dato dall'espressione calcolata precedentemente che qui riportiamo:

$$c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + c_{-n}e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} = a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Osservazione 6.3 Sia una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodica e continua a tratti. Allora:

1) se x è pari, allora $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

2) se x è dispari, allora $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$;

Si può facilmente verificare quanto detto osservando che gli integrali che definiscono i coefficienti a_n e b_n si annullano sotto le rispettive ipotesi.

$\square$

Posta $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione T-periodica e continua a tratti, sappiamo che:

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\,\mathrm{d}t$$

Possiamo quindi riscrivere la somma parziale come segue:

$$s_n(t) = \int_0^T x(u)\left(\frac{1}{T}\sum_{k=-n}^{n} e^{-i\frac{2\pi}{T}ku}e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\right)\mathrm{d}u$$

Ci interessa ora, semplificare l'espressione fra parentesi, al fine di riuscire a scrivere la somma parziale in forma più semplice. Con il cambio di variabile $k + n = h$ si ottiene:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{i\frac{2\pi}{T}k(t-u)} = e^{-i\frac{2\pi}{T}n(t-u)}\sum_{k=-n}^{n} e^{i\frac{2\pi}{T}(k+n)(t-u)} = e^{-i\frac{2\pi}{T}n(t-u)}\sum_{h=0}^{2n} e^{i\frac{2\pi}{T}h(t-u)}$$

dove l'ultimo termine è una serie geometrica in h di ragione $\exp(i\frac{2\pi}{T}(t-u))$ e sappiamo quindi calcolarne la somma. Se $\frac{t-u}{T} \in \mathbb{Z}$, l'intera espressione vale:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{i\frac{2\pi}{T}k(t-u)} = (2n+1)e^{-i\frac{2\pi}{T}n(t-u)}$$

Mentre per tutti gli altri casi abbiamo:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{i\frac{2\pi}{T}k(t-u)} = e^{-i\frac{2\pi}{T}n(t-u)}\frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{T}(2n+1)(t-u)}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{T}(t-u)}}$$

Raccogliendo $\exp(\frac{i}{2}\frac{2\pi}{T}(t-u))$ sia al numeratore che al denominatore e semplificando si ottiene:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{i\frac{2\pi}{T}k(t-u)} = \frac{e^{-i\frac{2\pi}{T}(n+\frac{1}{2})(t-u)} - e^{i\frac{2\pi}{T}(n+\frac{1}{2})(t-u)}}{e^{-\frac{i}{2}\frac{2\pi}{T}(t-u)} - e^{\frac{i}{2}\frac{2\pi}{T}(t-u)}}$$

Ora possiamo applicare le formule di Eulero per sostituire gli esponenziali con seni. Il risultato ottenuto viene chiamano *nucleo di Dirichlet* ed ha la seguente espressione:

$$D_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\frac{\sin(\frac{2\pi}{T}(n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{2\pi}{T}\frac{t}{2})}$$

dove al posto di $t-u$ abbiamo scritto solamente t. Possiamo quindi riscrivere la somma parziale come segue:

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} = \int_0^T x(u) D_n(t-u)\,\mathrm{d}u$$

$\square$

È necessario soffermarsi ancora un momento sul nucleo di Dirichlet per studiarne le proprietà. Non siamo certi, ad esempio, del comportamento di D_n quando $t = hT$, con $h \in \mathbb{Z}$. Possiamo tuttavia scrivere il rapporto fra derivata del numeratore e derivata del denominatore (infatti quest'ultima non è nulla) a calcolare tale rapporto in $t = hT$, con $h \in \mathbb{Z}$ per verificare che la funzione $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua. Possiamo anche verificare che essa è T-periodica.

6.3 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Iniziamo con l'osservare che per una funzione $x \in \mathcal{C}^{(1)}$ e con $k \neq 0$, abbiamo:

$$|c_k| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{T}{2\pi} \frac{2 \sup |x|}{k} + \frac{T^2}{2\pi} \frac{\sup |x'|}{k} \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty$$

(la maggiorazione si può svolgere dopo aver applicato una volta l'integrazione per parti). Si noti che il risultato non è casuale. Vale infatti il seguente teorema di carattere molto più generale.

Teorema 6.4 (Lemma di Riemann-Lebesgue) *Sia una funzione $x : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua a tratti. Allora:*

$$\int_a^b x(t) e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \textit{per } |\lambda| \to +\infty$$

$\square$

Da quanto appreso sinora, riconosciamo la forte relazione che sussiste tra il coefficiente c_k e la funzione $x(t)$ che lo definisce. Per evidenziare questa dipendenza identificheremo c_k con l'espressione $\hat{x}$. Osserviamo fin da subito che:

$$\frac{1}{T} \left(x(t) e^{i\frac{2\pi}{T}t} \middle| e^{i\frac{2\pi}{T}kt} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}(k-1)t}\,\mathrm{d}t = \hat{x}(k-1) = \widehat{xe^{i\frac{2\pi}{T}}}(k)$$

Questo sarà utile a breve.

Teorema 6.5 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e continua. Allora se esistono complessi i limiti*

$$\exists \lim_{t \to c^+} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \in \mathbb{C}, \qquad \exists \lim_{t \to c^-} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \in \mathbb{C}$$

allora le somme parziali di Fourier di f (anche non simmetriche) convergono a $f(c)$.

Dimostriamo questo teorema per il punto $c = 0$, ma il ragionamento può essere esteso a tutti gli altri casi. Definiamo quindi $g(t)$ come segue:

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{e^{it} - 1}$$

Possiamo calcolare i limiti per $t \to 0$ da destra e da sinistra derivando numeratore e denominatore e calcolarne il rapporto rispettivamente in 0^+ e 0^-:

$$g \sim \frac{f'(0^+)}{i} \quad \text{per } t \to 0^+, \qquad g \sim \frac{f'(0^-)}{i} \quad \text{per } t \to 0^-$$

g è dunque continua a tratti. Ricaviamo quindi

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t)e^{it} - g(t) + f(0) \\ \hat{f}(k) &= \delta_{k0} f(0) + \hat{g}(k-1) - \hat{g}(k) \end{aligned}$$

Otteniamo $\delta_{k0} f(0)$ in quanto la serie di Fourier di una costante coincide con la funzione stessa e quindi tutti i suoi coefficienti di Fourier sono nulli tranne quello per $k = 0$. Possiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned} \sum_{k=-m}^{n} \hat{f}(k) = f(0) + \sum_{k=-m}^{n} (\hat{g}(k-1) - \hat{g}(k)) &= \\ = f(0) + \hat{g}(-m-1) - \hat{g}(-m) + \hat{g}(-m) + \ldots - \hat{g}(n) &= \\ = f(0) + \hat{g}(-m-1) - \hat{g}(n) \xrightarrow[\text{puntualmente}]{} f(0) \quad \text{per } m, n \to +\infty & \end{aligned}$$

I termini della somma, infatti, vengono ad elidersi tranne il primo e l'ultimo che tendono a zero per il lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema 6.6 *Siano $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti, $t_0 \in \mathbb{R}$. Allora:*

I) se x è continua in t_0:

i)

$$\lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{i \frac{2\pi}{T} kt} = x(t_0)$$

ii)

$$\frac{a_0}{2} + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) = x(t_0)$$

II) se x è discontinua in t_0:

i)

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i \frac{2\pi}{T} kt} = \frac{1}{2} \left(x(t_0^+) + x(t_0^-) \right)$$

ii)

$$\frac{a_0}{2}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)=\frac{1}{2}\left(x(t_0^+)+x(t_0^-)\right)$$

Ci limitiamo a dimostrare il punto II), poiché se t_0 non fosse punto di discontinuità, il risultato del punto II) di tradurrebbe nel risultato del punto I) in quanto $(x(t_0^+) = x(t_0^-)$. Sia dunque, per semplicità, $t_0 = 0$ e la funzione $w(t)$ così definita per $t \in (-\pi, \pi]$:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(t)+f(-t)\right) & \text{se } t \neq 0 \\ \frac{1}{2}\left(f(0^+)+f(0^-)\right) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

w quindi è pari e perciò

$$\lim_{t\to 0^+} w(t) = \lim_{t\to 0^-} w(t) = w(0)$$

ed allora è continua anche in 0. Studiamone la derivabilità in 0 quando $t > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{w(t)-w(0)}{t} &= \frac{1}{2}\frac{f(t)+f(-t)-f(0^+)-f(0^-)}{t} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{f(t)f(0^+)}{t}-\frac{f(-t)f(0^-)}{-t}\right)\to \\ &\to \frac{1}{2}\left(f'(0^+)-f'(0^-)\right) \quad \text{per } t\to 0^+\end{aligned}$$

Inoltre riconosciamo che il rapporto incrementale è dispari e quindi esiste anche

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{w(t)-w(0)}{t} = -\lim_{t\to 0^+}\frac{w(t)-w(0)}{t}$$

Questo implica che w è $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti e quindi soddisfa le ipotesi del teorema 6.5. Possiamo quindi affermare che le sue somme parziali convergono a $w(0) = \frac{1}{2}\left(f(0^+)+f(0^-)\right)$. Possiamo ora esprimere la n-esima somma parziale simmetrica di f mediante il nucleo di Dirichlet che sappiamo essere una funzione pari. Pertanto:

$$s_n(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(f(t)+f(-t)\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

come si riconosce subito scrivendo il primo integrale come somma di due integrali e effettuando il cambio di variabile $t = -u$ nel secondo. Questo prova che $s_n(0)$ è anche la somma parziale simmetrica n-esima di Fourier della funzione w. Segue, sempre dal teorema 6.5 che essa tende a $w(0) = \frac{1}{2}\left(f(0^+)+f(0^-)\right)$.

$\square$

La convergenza puntuale della serie di Fourier, dimostrata in questi teoremi, può essere rappresentata anche con un secondo criterio di convergenza puntuale illustrato dal seguente teorema.

Teorema 6.7 *1) Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione T-periodica e assolutamente integrabile in senso generalizzato su $[0, T]$ ed esistono:*

$$\exists t_1, \ldots, t_p \in [0, T], t_1 = 0 < t_2 < \ldots < t_p = T : f\big|_{t_{k-1}, t_k} \text{ è monotona}$$

allora si ha:

I)

$$\forall t_0 \in [0, T] \quad \exists \lim_{t \to t_0^+} x(t) \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{t \to t_0^-} x(t) \in \mathbb{R}$$

II)

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i \frac{2\pi}{T} kt} \to \frac{1}{2} \left(x(t_0^+) + x(t_0^-) \right)$$

2) Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione T-periodica e $\operatorname{Re} x$ e $\operatorname{Im} x$ verificano le ipotesi del punto 1), allora valgono le conclusioni del punto 1).

6.4 Convergenza uniforme della serie di Fourier

Sia f la solita funzione T-periodica ed in più, continua e $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti. Allora possiamo cercare i coefficienti c_n di Fourier della funzione derivata che chiameremo c'_n.

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{T} \left[f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} \right]_0^T + i \frac{2\pi}{T} n \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} \, \mathrm{d}t = i \frac{2\pi}{T} n c_n \end{aligned}$$

poiché il termine fra parentesi quadre, ottenuto integrando per parti, è nullo. Segue:

$$c_n = -i \frac{T}{2\pi T} c'_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

Se f è anche $\mathcal{C}^{(2)}$ a tratti, si può iterare il procedimento con c''_n e ottenere

$$c_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

Possiamo quindi evidenziare che più la funzione è regolare, più coefficienti tendono a zero rapidamente.

□

Teorema 6.8 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua e $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti. Allora la sua serie di Fourier converge uniformemente su $\mathbb{R}$.*

Consideriamo ancora il coefficiente n-esimo c_n. Esso può sempre essere maggiorato come segue:

$$|c_n| \le \frac{c}{2} |c'_n| \le \frac{c}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c'_n|^2 \right)$$

dove c è una generica costante. Ora, per la disuguaglianza di Bessel (teorema 5.19) si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$$

Quindi:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \leq \frac{c}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n'|^2\right) \in \mathbb{R}$$

dunque $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ converge. Inoltre

$$\exists \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$$

Ora si può applicare il criterio di Weierstrass per affermare che la serie di Fourier converge uniformemente.

Teorema 6.9 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodica e $\mathcal{C}^{(2)}$ a tratti. Allora la serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-i\frac{2\pi}{T}nt\right) c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

converge $\forall t \in \mathbb{R}$ come segue:

$$\begin{cases} f'(t) & \text{se } f \text{ è derivabile in } t \\ \frac{1}{2}\left(f'(t_+) + f'(t_-)\right) & \text{se } f \text{ non è derivabile in } t \end{cases}$$

In generale, vale il seguente teorema che consente di ottenere informazioni riguardo la regolarità della funzione, partendo dai suoi coefficienti di Fourier.

Teorema 6.10 *Siano, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione T-periodica e sommabile su $(0, T)$, $k \in \mathbb{N}$. Allora se esiste $\alpha > 1$ tale che:*

$$|c_n| \leq \frac{c}{|n|^{k+\alpha}} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

con c costante generica, allora f è una funzione di classe $\mathcal{C}^{(k)}$.

Capitolo 7

Trasformata di Fourier

7.1 Definizione di trasformata di Fourier

Abbiamo già incontrato, nel capitolo 3 un tipo di trasformazione integrale: la trasformata di Laplace. Qui ne introduciamo una nuova, strettamente legata alla serie di Fourier discussa nel precedente capitolo, che viene chiamata trasformata di Fourier.

Definizione 7.1 *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Chiamiamo* trasformata di Fourier *di x la funzione $\hat{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, così definita:*

$$\hat{x}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t) \, \mathrm{d}t$$

In alcuni casi è possibile trovare definita la trasformata della funzione x nella seguente forma equivalente alla precedente:

$$X(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i f t} x(t) \, \mathrm{d}t$$

La relazione tra le variabili ω e f è la seguente:

$$\omega = 2\pi f$$

e il loro significato fisico è, rispettivamente, la pulsazione e la frequenza del segnale. La relazione fra X e $\hat{x}$ è invece la seguente:

$$X(f) = \hat{x}(2\pi f) \qquad \hat{x}(\omega) = X\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

7.2 Proprietà della trasformata di Fourier

Teorema 7.2 *Sia x una funzione sommabile su $\mathbb{R}$. Allora la sua trasformata di Fourier, gode delle seguenti proprietà:*

1) è una funzione continua, ossia $\hat{x}, X \in \mathcal{C}$;

2) si ha:

$$\hat{x}(\omega) \to 0 \quad \textit{per } |\omega| \to +\infty$$
$$X(f) \to 0 \quad \textit{per } |f| \to +\infty$$

La proprietà 1) può essere dimostrata facilmente poiché la funzione $\omega \mapsto e^{-i\omega t}x(t)$ è continua per tutti i t reali ed inoltre $\left|e^{-i\omega t}x(t)\right| = |x(t)| \in L^1(\mathbb{R})$. Per la proprietà 2) possiamo affermare che:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \int_{-\infty}^{-M} |x(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{M}^{+\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

ed in più

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_{-\infty}^{-M} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{M}^{+\infty} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t\right| + \\ &+ \left|\int_{-M}^{M} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \\ &\leq \varepsilon + \left|\int_{-M}^{M} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t\right| \to 0 \quad \text{per } |\omega| \to +\infty\end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale converge per il lemma di Riemann-Lebesgue (teorema 6.4).

Riconsiderando la trasformata di Fourier come trasformazione integrale, teniamo ad evidenziare che essa ha per dominio lo spazio delle le funzioni sommabili e per codominio quello delle funzioni continue.

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

A questo punto suggeriamo la lettura di alcuni esempi significativi presenti sul B.MAT: esempi 6.1-1, 6.1-2, 6.1-3 pagine 237-239. Il loro svolgimento non presenta particolari difficoltà oltre al calcolo di integrali; talvolta può risultare utile risolvere gli integrali con il metodo dei residui (esempio 6.1-3).

Per le trasformate di Laplace, avevamo considerato alcuni casi particolari di applicazione: i cambiamenti di scala, le traslazioni, gli smorzamenti, ecc. Facciamo altrettanto per la trasformata di Fourier. Le dimostrazioni si ricavano tutta a partire dell'integrale di Fourier e pertanto, spesso, non verranno riportate per intero.

Teorema 7.3 *La trasformazione di Fourier è lineare.*

Questo discende dalla definizione.

Teorema 7.4 *Siano x una funzione sommabile, $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $v(t) = x(t - t_0)$. Allora:*

$$\hat{v}(t) = e^{-i\omega t_0}\hat{x}(\omega)$$
$$V(f) = e^{-i2\pi t_0}X(f)$$

È sufficiente calcolare l'integrale di Fourier per $x(t-t_0)$ e applicare il cambio di variabile $t - t_0 = u$.

Teorema 7.5 *Siano x una funzione sommabile, $\omega_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $w(t) = e^{i\omega_0 t}x(t)$. Allora:*

$$\hat{w}(\omega) = \hat{x}(\omega - \omega_0)$$
$$W(f) = W(f - f_0)$$

Il calcolo dell'integrale è banale.

Teorema 7.6 *Siano x una funzione sommabile, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y(t) = x(ct)$. Allora:*

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{|c|}\hat{x}\left(\frac{\omega}{c}\right)$$
$$Y(f) = \frac{1}{|c|}X\left(\frac{f}{c}\right)$$

Calcolando l'integrale con il cambio di variabile $ct = u$ si ottiene:

$$\hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}x(ct)\,\mathrm{d}t = \frac{\operatorname{sgn}(c)}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\frac{u}{c}}x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots$$

$\square$

Analizziamo ora alcuni casi non incontrati nello studio della trasformata di Laplace, ma che possono presentare delle analogia con la serie di Fourier.

Teorema 7.7 *Siano x una funzione sommabile, $z(t) = \overline{x(t)}$. Allora:*

$$\hat{z}(\omega) = \overline{\hat{x}(-\omega)}$$
$$Z(f) = \overline{X(-f)}$$

Si ottiene coniugando due volte l'integrale di Fourier.

Teorema 7.8 *Sia x una funzione sommabile, reale e pari. Allora $\hat{x}$ è reale e pari. Se, y è, invece, una funzione sommabile, reale e dispari, allora $\hat{y}$ è puramente immaginaria e dispari.*

Per x procediamo come segue:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-i\omega t}x(t)\,\mathrm{d}t - \int_{+\infty}^{0} e^{i\omega s}x(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)x(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(\omega t)x(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

dove è stato operato il cambio di variabile $-t = s$. Per y il procedimento è simile e si ottiene:

$$\hat{y}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} x(t)\,\mathrm{d}t = -2i \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) x(t)\,\mathrm{d}t$$

$\square$

I teoremi che seguono riguardano rispettivamente la trasformata di Fourier della derivata di una funzione e la derivata della trasformata di Fourier.

Teorema 7.9 *Sia x una funzione sommabile su $\mathbb{R}$, continua, $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti e tale che la sua derivata sia ancora sommabile su $\mathbb{R}$. Allora:*

$$\widehat{x'}(\omega) = i\omega\hat{x}(\omega)$$
$$\mathcal{F}\left[x'\right](f) = 2\pi i f X(f)$$

Questo si dimostra integrando per parti i due integrali che seguono:

$$\begin{aligned}\widehat{x'}(\omega) &= \lim_{M\to+\infty}\left(\int_{-M}^{0} e^{-i\omega t} x'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^M e^{-i\omega t} x'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t)\,\mathrm{d}t = i\omega\hat{x}(\omega)\end{aligned}$$

Naturalmente si può estendere la proprietà alle derivate n-esime. Risulta infatti per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $x \in \mathcal{C}^{(n-1)}$, x $\mathcal{C}^{(n)}$ a tratti, $x^{(k)} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per $k = 1, \ldots, n$:

$$\widehat{x^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n\hat{x}(\omega)$$
$$\mathcal{F}\left[x^{(n)}\right](f) = (2\pi i f)^n X(f)$$

Osservazione 7.10 Come corollario del teorema precedente, si noti che se $\omega \neq 0$, si ha:

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\widehat{x^{(n)}}}{(i\omega)^n} = o\left(\omega^{-2}\right) \quad \text{per } |\omega| \to +\infty$$

Teorema 7.11 *Sia $x \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora se la funzione $t \mapsto tx(t) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ si ha che $\hat{x}, X \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e*

$$\hat{x}'(\omega) = \widehat{-itx(t)}(\omega)$$
$$X'(f) = \mathcal{F}\left[-2\pi i t x(t)\right](f)$$

L'ipotesi che $t \mapsto tx(y) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ è indispensabile. Infatti, posta $\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t)\,\mathrm{d}t$, si deve verificare che:

a) $\exists \frac{\partial}{\partial\omega}\left(e^{-i\omega t}x(t)\right)$;

b) $\left|\frac{\partial}{\partial\omega}\left(e^{-i\omega t}x(t)\right)\right| = |tx(t)|$;

dove $|tx(t)|$ deve essere sommabile. È possibile trovare una dimostrazione rigorosa di questo teorema nella proposizione 6.2-5 alle pagine 248-249 del B.MAT.

Osservazione 7.12 Se la funzione $t^n x(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ per ogni naturale n, allora

$$\hat{x}^{(n)}(\omega) = \widehat{(-it)^n x}(t)(\omega)$$

e $\hat{x}$ è di classe $\mathcal{C}^{(\infty)}$.

□

Per verificare quanto affermato sinora riguardo ai teoremi di trasformata della derivata e derivata della trasformata si può prendere la funzione gaussiana $g_a(t) = e^{-at^2}$ definita per $a \in \mathbb{R}^+$. Essa rispetta le ipotesi del teorema 7.11 perché $g_a'(t) = -2ate^{-at^2}$ è ancora sommabile su $\mathbb{R}$. Dunque si può calcolare che:

$$\hat{g}_a'(\omega) = -\widehat{itg_a(t)}(\omega) = -\frac{\omega}{2a}\hat{g}_a(\omega)$$

equazione differenziale che dà per soluzione:

$$\hat{g}_a(\omega) = \hat{g}_a(0)e^{-\frac{w^2}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{w^2}{2a}}$$

com'è possibile verificare calcolando esplicitamente l'integrale di Fourier per $\omega = 0$. Notiamo che se $a = \frac{1}{2}$ il risultato è ancora la gaussiana di partenza a meno di un fattore costante.

□

Ricordiamo che la trasformata di Laplace della convoluzione di due funzioni gode di un'ottima proprietà: è il prodotto delle trasformate delle due funzioni. Ciò vale anche per la trasformata di Fourier.

Teorema 7.13 *Siano $x, y \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora:*

$$\widehat{x * y} = \hat{x} \cdot \hat{y}$$

7.3 Inversione della trasformata di Fourier

Anche nel caso della trasformata di Laplace avevamo identificato alcuni metodi che ci consentivano di effettuare l'operazione opposta: dalla funzione trasformata ottenere la funzione di partenza. Anche la trasformata di Fourier ha una sua antitrasformata che ora introduciamo.

Riprendiamo l'esempio 6.1-3 del B.MAT a pagina 238. Esso fa riferimento all'esempio precedente nel quale si era calcolata la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = e^{|t|}$. Si ottiene:

$$\hat{x}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Questa nuova funzione è ancora sommabile e possiamo calcolarne nuovamente la trasformata risolvendo l'integrale con il metodo dei residui. Otteniamo:

$$\hat{\hat{x}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y}\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi e^{-|y|} = 2\pi x(y) = 2\pi x(-y)$$

La somiglianza con la funzione di partenza è notevole e possiamo ipotizzare una che trasformare la funzione trasformata serva a ricondurci alla funzione di partenza. Un secondo esempio aiuterà a convincersi di ciò.

Prendiamo la funzione $x(t) = te^{-|t|}$. Allora abbiamo:

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-|t|}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{0} te^{(1-i\omega)t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} te^{-(1+i\omega)t}\,\mathrm{d}t = \\ &= -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\end{aligned}$$

ottenuto integrando per parti i due integrali. Dunque la funzione trasformata è ancora trasformabile, perciò:

$$\hat{\hat{x}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2}e^{-i\omega y}\,\mathrm{d}\omega = -2\pi y e^{|y|} = 2\pi x(-y)$$

calcolato ancora con i residui.

I risultati di questi esempi risultano abbastanza convincenti per formalizzare quanto ipotizzato poc'anzi nel seguente teorema.

Teorema 7.14 (Formula di inversione) *Sia x una funzione sommabile e continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ tale che la sua trasformata di Fourier sia ancora sommabile da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Allora:*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[x]\right](t) = 2\pi x(-t)$$
$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[x]\right](s) = \widehat{\mathcal{F}[X]}(-2\pi s)$$

Osservazione 7.15 Alla luce di quanto affermato nel teorema 7.9, se $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, x è $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti e $x, x', x'' \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora:

$$\hat{x} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

che è condizione sufficiente per applicare la formula di inversione.

Ritorniamo sulla formula d'inversione. Vale il seguente teorema.

Teorema 7.16 (di inversione) *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $x \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e sia $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti. Allora, se*

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(x(t_+) + x(t_-)\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y}x(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

L'espressione "v.p." sta ad indicare l'integrale nel senso del "valore principale" ed è definito come sopra indicato.

□

Definizione 7.17 *Definiamo lo spazio $\mathcal{S}$ come segue:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : \forall h, k \in \mathbb{N} \quad \exists C_{h,k} \in \mathbb{R}^+ : \sup\left|t^h \mathrm{D}^k x(t)\right| \leq C_{h,k}\right\}$$

Si tratta di spazio vettoriale contenuto nell'intersezione $L^1 \cap L^2$.

Osservazione 7.18 Se $\left|t^h x(t)\right| \leq C_h$ vale $\forall h$, allora vale anche:

$$\left|t^{h+2}x(t)\right| \leq C \quad \Rightarrow \quad \left|t^h x(t)\right| \leq \frac{C}{t^2} \quad \Rightarrow \quad t^h x(t) \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} \in \mathcal{C}^{(\infty)}$$

Osservazione 7.19 Dal teorema 7.9 e dall'osservazione 7.12 si ricava anche:

$$\left|\omega^k \mathrm{D}^h \hat{x}(\omega)\right| = \left|(i\omega)^k \mathrm{D}^h \hat{x}(\omega)\right| = \mathcal{F}\left[\mathrm{D}^k(-i\omega)^h x(t)\right](\omega)$$

dove la funzione è limitata.

Possiamo ricapitolare il comportamento della trasformata di Fourier per funzione appartenenti allo spazio $\mathcal{S}$ come segue:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow[1-1]{\text{su}} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\widehat{x(-t)}\right]$$

Un esempio di funzione di $\mathcal{S}$ può essere la funzione gaussiana $t \mapsto e^{-at^2}$ per $a \in \mathbb{R}^+$, oppure la più generica funzione $t \mapsto t^k e^{-at^2}$ per $a \in \mathbb{R}^+$ e $k \in \mathbb{N}$.

7.4 Trasformata di Fourier per funzioni di L^2

Teorema 7.20 *Siano $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Allora*

$$(x_1|\, x_2) = \frac{1}{2\pi} (\hat{x}_1|\, \hat{x}_2), \qquad (x_1|\, x_2) = (X_1|\, X_2)$$

Di più:

$$\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{x}\|_2^2 \quad \forall x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Per la dimostrazione osserviamo, innanzitutto, che per le funzioni di $\mathcal{S}$ vale il teorema 7.16 di inversione poiché esse appartengono anche a L^2. Dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{x}_1(\omega)\,\mathrm{d}\omega \right) \overline{x_2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Considerando che

$$\left| e^{i\omega t} \hat{x}_1(\omega)\overline{x_2(t)} \right| = |\hat{x}_1(\omega) x_2(t)|$$

possiamo applicare il teorema 1.19 di Tonelli alla seguente espressione ed ottenere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}_1(\omega) x_2(t)|\,\mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}t = \|\hat{x}_1\|_1 \cdot \|x_2\|_1$$

Quindi si può scambiare l'ordine di integrazione ed avere:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\overline{x_2(t)}\,\mathrm{d}t \right) \hat{x}_1(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x_2(t)\,\mathrm{d}t} \right) \hat{x}_1(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_1(\omega)\overline{\hat{x}_2(\omega)}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Definizione 7.21 *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Chiamiamo* supporto *di f l'insieme:*

$$\operatorname{supp} f \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$$

Si noti che il supporto è chiuso in quanto si tratta di una chiusura.

È possibile verificare che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

è $\mathcal{C}^{(\infty)}$ e a supporto compatto. Se poniamo $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha$ e $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} g(x)$, Allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Quindi le funzioni $\varphi_n = n\varphi(nx)$ per $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ sono ancora $\mathcal{C}^{(\infty)}$ e a supporto compatto e $\operatorname{supp} \varphi_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Se prendiamo una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ e la funzione caratteristica di un intervallo $\chi_{[-n,n]}$, allora loro prodotto è ancora L^2 e a supporto compatto. Possiamo anche dire che la convoluzione $\varphi_n * f\chi_{[-n,n]}$ è $\mathcal{C}^{(\infty)}$ e a supporto compatto. Infatti, prese due generiche funzioni x e y entrambe a supporto compatto, si ha:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{supp} x \subseteq [-a, a] \\ \operatorname{supp} y \subseteq [-b, b]\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp}(x * y) \subseteq [-a-b, a+b]$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\left\|f\chi_{[-n,n]} - f\right\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\chi_{[-n,n]} - f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{-n} |f(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_{n}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty\end{aligned}$$

Quindi scriviamo:

$$f\chi_{[-n,n]} \xrightarrow{L^2} f$$

Definizione 7.22 *Se $\forall f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ $\exists\{s_n\}$ successione nello spazio vettoriale delle funzioni $\mathcal{C}^{(\infty)}$ a supporto compatto (che è sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}$) tale che s_n converge a f in L^2 (cioè $s_n \xrightarrow{L^2} f$), allora diciamo che $\mathcal{S}$ (oppure $\mathcal{C}^{(\infty)}$ a supporto compatto) è* denso *in L^2 (quindi anche in L^1).*

□

Ora ci occupiamo di definire la trasformata di Fourier in L^2. Per fare ciò, ci serviamo delle seguenti considerazioni.

Siano, innanzitutto, $x \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\{s_n\}$ successione in $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tale che:

$$s_n \xrightarrow{L^2} x, \qquad \hat{s}_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

Allora, anche in virtù del teorema 7.20, possiamo scrivere:

$$\|\hat{s}_n - \hat{s}_m\|_2^2 = \left\|\widehat{s_n - s_m}\right\|_2^2 = 2\pi \left\|s_n - s_m\right\|_2^2 \le \varepsilon^2$$

per n e m sufficientemente grandi; dunque $\{\hat{s}_n\}$ è di Cauchy in L^2. Siccome $\exists y \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tale che:

$$\hat{s}_n \xrightarrow{L^2} y$$

e $\{t_n\}$ sia una successione in $\mathcal{S}$ tale che:

$$t_n \xrightarrow{L^2} x$$

allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\left\|\hat{t}_n - y\right\|_2 &= \left\|\hat{t}_n - \hat{s}_n + \hat{s}_n - y\right\|_2 \leq \\ &\leq \left\|\hat{t}_n - \hat{s}_n\right\|_2 + \|\hat{s}_n - y\|_2 \to \\ &\to \left\|\hat{t}_n - \hat{s}_n\right\|_2 = \\ &= 2\pi \|t_n - s_n\|_2 = \\ &= 2\pi \|t_n - x + x - s_n\|_2 \leq \\ &\leq 2\pi \left(\|t_n - x\|_2 + \|x - s_n\|_2\right) \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty\end{aligned}$$

Definizione 7.23 *Con le ipotesi e le notazioni sinora utilizzate, chiamiamo* trasformata di Fourier *di x la funzione y.*

Osservazione 7.24 Il teorema 7.20 continua a valere anche con $x \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Infatti, se $\{s_n\}$ è una successione in $\mathcal{S}$ tale che:

$$s_n \xrightarrow{L^2} x, \qquad \hat{s}_n \xrightarrow{L^2} \hat{x}, \qquad \|s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{s}_n\|_2^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora

$$\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{x}\|_2^2 \quad \forall x \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$$

Questo risultato garantisce la continuità della trasformata di Fourier. Infatti:

$$\begin{gathered} x_n \xrightarrow{L^2} x \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x}_n \xrightarrow{L^2} \hat{x} \\ \Downarrow \\ \mathcal{F} : L^2 \xrightarrow[1-1]{} L^2 \end{gathered}$$

e quindi deve esistere una formula di inversione.

Teorema 7.25 (di Plancherel) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Allora:*

$$\hat{f}(\omega) = \underset{M \to +\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-M}^{M} e^{-i\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

*dove l'espressione "*l.i.m.*" indica il limite nel senso della norma in L^2 e cioè*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega) - \int_{-M}^{M} e^{-i\omega t} f(t)\, \mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}\omega \to 0 \quad \textit{per } M \to +\infty$$

Osservazione 7.26 Se $\{y_n\}$ è una successione in L^2 tale che

$$y_n \xrightarrow{L^2} y, \qquad y_n(t) \to w(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

allora $y = w$ quasi ovunque. In più, si noti che:

$$\begin{array}{rcl} \text{convergenza puntuale} & \not\Rightarrow & \text{convergenza in } L^2 \\ \text{convergenza in } L^2 & \not\Rightarrow & \text{convergenza puntuale} \\ \left.\begin{array}{l}\text{convergenza puntuale} \\ \text{convergenza in } L^2\end{array}\right\} & \Rightarrow & \text{i limiti sono uguali} \end{array}$$

e si ha:

$$x \in L^1 \cap L^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \hat{s}_n \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Osservazione 7.27 Dai teoremi precedenti, ed in particolare da quello di Plancherel, deriva che se $x \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \underset{M\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-M}^{M} e^{i\omega t}\hat{x}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$
$$x(t) = \underset{M\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-M}^{M} e^{2\pi i f t} X(f)\,\mathrm{d}f$$

7.5 Inversione della trasformata di Laplace

Riprendiamo lo studio dell'antitrasformata di Laplace, accennata nel paragrafo 3.6.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti e $\mathcal{L}$-trasformabile, allora preso $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > \sigma(f)$ la funzione $g(t) = e^{-\alpha t} f(t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ e dunque trasformabile secondo Fourier. Siccome anche g è $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti vale la formula di inversione nel senso del valore principale. Perciò (si noti, ad un certo punto, il cambio di variabile $z = \alpha + i\omega$):

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\hat{g}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{i\omega t} \left(\int_0^{+\infty} e^{-i\omega v} e^{-\alpha v} f(v)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{i\omega t} \mathcal{L}[f](\alpha + i\omega)\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{t(z-\alpha)} \mathcal{L}[f](z)\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{tz} \mathcal{L}[f](z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Dunque si ha:

$$f(t) = e^{\alpha t} g(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} e^{tz} \mathcal{L}[f](z)\,\mathrm{d}z$$

Per il calcolo esplicito dell'integrale, nota $\mathcal{L}[f]$, si ricorre al lemma di Jordan (teorema 2.27). Esso risulterà nullo in ogni caso per $t < 0$, mentre in tutti gli altri casi si calcola l'integrale in modo simile a quanto si fa con i residui e si applica il lemma di Jordan anziché il lemma del grande cerchio.

A questo argomento è dedicato l'intero paragrafo 5.4 da pagina 219 del B.MAT.

7.6 Cenni sulla trasformata di Fourier per funzioni di due variabili

Definizione 7.28 *Sia* $x \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. *Chiamiamo* trasformata di Fourier *di* x *la funzione* $\hat{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$*, così definita:*

$$\hat{x}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{t})} x(t_1, t_2)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2$$

Si conservano tutte le proprietà formali viste per la trasformata di Fourier di funzioni di una variabile. In particolare, se $x \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$:

1) $\hat{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$;

2) $\hat{x}(\boldsymbol{\omega}) \to 0 \quad \text{per } |\boldsymbol{\omega}| \to +\infty$;

3) $\exists \frac{\partial f}{\partial t_1} \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$;

4) $\frac{\partial f}{\partial t_1} \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}) \;\Rightarrow\; \widehat{\frac{\partial f}{\partial t_1}} = i\omega_1 \hat{f}(\omega_1, \omega_2)$;

5) $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}), \hat{x} \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}) \;\Rightarrow\; x(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{t})} \hat{x}(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$;

6) $x \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}) \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{R\to+\infty} \iint_{\overline{B_R(\mathbf{0})}} e^{i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{t})} \hat{x}(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$;

Lo spazio $\mathcal{S}$ può essere ridefinito in $\mathbb{R}^2$ come segue:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \overset{\text{def}}{=} \Bigg\{ x \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}) : \forall h_1, h_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N} \quad \exists C_{h_1,h_2,k_1,k_2} \in \mathbb{R}^+ : \\ \sup \left| t_1^{h_1} t_2^{h_2} \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2}} x(t_1, t_2) \right| \le C_{h_1,h_2,k_1,k_2} \Bigg\}$$

Allora $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow[1-1]{\text{su}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ e per funzioni $x_1, x_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ si ha:

1) $(x_1 | \, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \, (\hat{x}_1 | \, \hat{x}_2)$;

2) $\|x\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \|\hat{x}\|_2^2 \quad \forall x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Definizione 7.29 *Sia* $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. *Diciamo che* x *è radiale quando* $\forall \boldsymbol{T}$ rotazione *in* $\mathbb{R}$ *e* $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ *si ha* $x(\boldsymbol{T}(u, v)) = x(u, v)$*, ossia il valore assunto da* x *dipende solo dal modulo di* (u, v).

Teorema 7.30 *Sia* $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *sommabile e radiale. Allora* $\hat{x}$ *è radiale.*

Si dimostra come segue:

$$\begin{aligned}\hat{x}(T(\omega_1,\omega_2)) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega})\cdot(u,v))}x(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i((\omega_1,\omega_2)\cdot{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{T}(u,v))}x(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Operando il cambio di variabile ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{T}(u,v) = (s,t)$ e considerando che la matrice inversa della trasposta della rotazione è ancora la matrice di rotazione, si ha che $(u,v) = \left({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{T}\right)^{-1}(s,t) = \boldsymbol{T}(s,t)$. Perciò:

$$\begin{aligned}\hat{x}(Tc) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i((\omega_1,\omega_2)\cdot(s,t))}x(\boldsymbol{T}(s,t))|\det\boldsymbol{T}|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i((\omega_1,\omega_2)\cdot(s,t))}x(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \\ &= \hat{x}(\omega_1,\omega_2)\end{aligned}$$

7.7 Principio di indeterminazione

Teorema 7.31 *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $x \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\operatorname{supp} x \subseteq [-a,a]$ per a reale fissato. Allora siccome il supporto di x è compatto, la sua traformta di Fourier può essere prolungabile a una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ ma non può essere a supporto compatto.*

Definizione 7.32 *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $x \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $x' \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $tx(t) \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, x è continua e $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti, $\omega\hat{x}(\omega) \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Definiamo* fattore di dispersione *di x il numero ρ_x così definito:*

$$\rho_x \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e fattore di dispersione *di $\hat{x}$ il numero $\rho_{\hat{x}}$ così definito:*

$$\rho_{\hat{x}} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 7.33 *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $x \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $x' \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $tx(t) \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, x è continua e $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti, $\omega\hat{x}(\omega) \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Allora:*

$$\rho_x \cdot \rho_{\hat{x}} \geq \frac{1}{2}$$

Per la dimostrazione ci serviamo di $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$.

$$\int_A^B t\overline{x(t)}x'(t)\,\mathrm{d}t = \left[t|x(t)|^2\right]_A^B - \int_A^B |x(t)|^2\,\mathrm{d}t - \int_A^B t\overline{x'(t)}x(t)\,\mathrm{d}t$$

dove il termine fra parentesi quadra deve necessariamente convergere a 0 quando $A \to -\infty$ e $B \to +\infty$. Allora possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\overline{x(t)}x'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} t\overline{x'(t)}x(t)\,\mathrm{d}t$$

da cui segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} t\overline{x(t)}x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq 4\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t\overline{x(t)}x'(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leq$$

$$\leq 4\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per eseguire la maggiorazione. Ora, per l'uguaglianza di Parseval (estesa alle trasformate di Fourier) possiamo riscrivere l'ultimo termine come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{x'}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega =$$

Quindi la disuguaglianza precedente diventa:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2\,\mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

I ragionamenti svolti finora per $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t$ si possono riscrivere dualmente per $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$ e ottenere:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\right)^2 \leq 4\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}'(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{tx(t)}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= 8\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Notiamo che i due termini finali sono gli stessi del caso precedente, quindi possiamo moltiplicare fra loro i membri delle due disuguaglianze per ottenere:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^2 \cdot 8\pi\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\right)^2$$

Da cui segue:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\hat{x}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\|x\|_2 \cdot \|\hat{x}\|_2$$

ossia:

$$\rho_x \cdot \rho_{\hat{x}} \geq \frac{1}{2}$$