

SISTEMI TEMPO-CONTINUUI

SERIE DI FOURIER

CONDIZIONI DI DIRICHLET

- 1) $\int_T |x(t)| dt < \infty$
- 2) Max e min in numero finito in T
- 3) Pti di discontinuità in numero finito in T



SERIE DI FOURIER

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (D)$$

$x(t)$ REALE \Rightarrow

$$1) C_{-n} = C_n^* \quad (D)$$

$$\begin{aligned} 2) x(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re} \{ 2C_n e^{j2\pi n f_0 t} \} = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \quad (D) \end{aligned}$$

$$3) x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

$$2C_n = a_n - j b_n \quad (D)$$

$C_n \Rightarrow$ SPETTRO A RIGNE

TRASFORMATA DI FOURIER

CONDIZIONI DI DIRICHLET \Rightarrow

TRASFORMATA DI FOURIER

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

ENERGIA DEL SEGNALE

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

ovvero che esista

$x(t)$ REALE \Rightarrow SIMMETRIA HERMITIANA

$$X^*(f) = X(-f) \quad (D)$$

$$x(t) = \int_0^{+\infty} 2 |X(f)| \cos(2\pi ft + \arg X(f)) df \quad (D)$$

Spettro ampiezze simmetrico, spettro fasi antisimmetrico.

PROPRIETÀ

- 1) Linearità (D)
- 2) Trasformata di segnali reali pari o reali dispari (D)
- 3) Trasformata di $x^*(t)$ $F[x^*(t)] = X^*(-f)$ (D)
- 4) Traslazione Temporale (D)
- 5) Cambiamento di scala

$$F[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$$

6) Relazione di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df \quad (D)$$

Teorema di Rayleigh

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

7) Derivazione

$$F\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] = j2\pi f F[X(f)]$$

8) Integrazione

$$F\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{F[X(f)]}{j2\pi f} \quad \text{per } x(0) = 0$$

9) Convulsione

$$F[X(t) * y(t)] = F[X(f)] \cdot F[Y(f)] \quad (D)$$

10) Moltiplicazione

$$F[X(t) y(t)] = F[X(f)] * F[Y(f)]$$

11) Traslazione in frequenza

(D)

12) Modulazione a prodotto

$$F[X(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = \frac{e^{i\varphi}}{2} X(f - f_0) + \frac{e^{-i\varphi}}{2} X(f + f_0) \quad (D)$$

13) Dualità

$$F[X(f)] = x(t) \Rightarrow F[x(t)] = X(-f)$$

RIPETIZIONE PERIODICA

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \Rightarrow$$

$$\widehat{x_p(t)} = C_n = f_0 X(n f_0) \Rightarrow \quad (1)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0 X(n f_0) e^{j 2\pi n f_0 t}$$



TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

$$\text{Supp } x(t) =]-t_m, t_m[, \quad T \geq 2t_m \quad (f_0 \leq \frac{1}{2t_m})$$

(Condizione di non-aliasing) \Rightarrow

$$\begin{aligned} X(n f_0) \rightarrow f_0 X(n f_0) = C_n &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j 2\pi n f_0 t} = x_p(t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \xrightarrow{\text{or}} x(t) \leftrightarrow X(f) \end{aligned}$$

BANDA DI UN SEGNALE

Bande: intervallo (f_1, f_2) sul semiasse positivo delle frequenze ove lo spettro di ampiezza di $|X(f)|$ è significativamente diverso da zero.
larghezza di banda: $B = f_2 - f_1$

Bande relative: B/f_0

Frequenza di centro banda $f_0 = (f_1 + f_2)/2$

$B/f_0 \ll 1 \Rightarrow$ segnale a banda stretta

$B/f_0 \approx 2 \Rightarrow$ segnale a banda larga

SISTEMI LTI



DEFINIZIONI

- Sistema reale: $x(t)$ reale $\Rightarrow y(t)$ reale
- Sistema lineare: $T[ax_1(t) + bx_2(t)] = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]$
- Sistema Tempo-Invariante: $T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$
- Sistema causale: $y(t)$ dipende da $x(t)$ per $t \leq t_0$
- Sistema senza memoria $y(t_0)$ dipende solo da $x(t_0)$

Sistema LTI: Lineare Tempo Invariante

Descritto da equazioni integro-differenziali a coefficienti costanti.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{A_y e^{j\varphi_y}}{A_x e^{j\varphi_x}} = \frac{A_y}{A_x} e^{j(\varphi_y - \varphi_x)} =$$

$$= |H(f)| e^{j \arg H(f)}$$

CARATTERISTICA
DI AMPIEZZA

CARATTERISTICA
DI FASE

$$y(t) = H(f) x(t) = |H(f)| e^{j \arg H(f)} A_x e^{j(2\pi f t + \varphi_x)} =$$
$$= A_y e^{j(2\pi f t + \varphi_y)}$$

è un segnale alla stessa frequenza perché è $e^{j2\pi f t}$
è una autofunzione rispetto alle operazioni di derivazione e integrazione.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) X(f) e^{j2\pi ft} df \Rightarrow$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n f_0) C_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

LTI reale \Rightarrow simmetria hermitiana di H :

$$H(-f) = H^*(f)$$

LTI REALI IN REGIME SINUSOIDALE

$$x(t) = V_{xm} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x) \Rightarrow$$

$$C_x = \frac{V_{xm}}{2} e^{j\varphi_x}, \quad C_{x-1} = \frac{V_{xm}}{2} e^{-j\varphi_x} \Rightarrow$$

$$C_{y1} = \frac{V_{xm}}{2} H(f_0) e^{j\varphi_x}, \quad C_{y-1} = \frac{V_{xm}}{2} H(-f_0) e^{-j\varphi_x} \Rightarrow$$

$$y(t) = \sum_n C_n e^{j2\pi n f_0 t} = \frac{V_{xm}}{2} H(f_0) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x)} +$$

$$+ \frac{V_{xm}}{2} H^*(f_0) e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_x)} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_{xm}}{2} H(f_0) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x)} \right\} =$$

$$= V_{xm} |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x + \arg H(f_0)) =$$

$$= V_{ym} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_y)$$

$$\dot{V}_x \stackrel{\text{def}}{=} V_{xm} e^{j\varphi_x} \Rightarrow y(t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{V}_y H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \Rightarrow$$

$$H(f) = \frac{\dot{V}_y}{\dot{V}_x}$$

CONDIZIONI DI NON DISTORSIONE

$$\begin{cases} |H(f)| = A & A \neq 0 \\ \arg H(f) = -2\pi f t_0 \end{cases}$$

In tal caso, $y(t) = H(f)x(t)$ è una versione non distorta di $x(t)$ poiché lo riproduce a meno di una costante moltiplicativa:

$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

FILTRI ELETTRICI

Filtro elettrico ideale: rete LTI non distorcente in certe bande (dette bande passanti) e con funzioni identicamente nulle al di fuori delle bande passanti.

Filtri passa basso, passa alto, passa bande, elimina bande, ecc.

SISTEMI LTI IN PARALLELO E IN SERIE

$$H_1, H_2 \text{ in serie} \Rightarrow H(f) = H_1(f)H_2(f)$$

$$H_1, H_2 \text{ in parallelo} \Rightarrow H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

FUNZIONE IMPULSIVA

DISTRIBUZIONI

Funzionale: operatore T che associa ad una funzione uno scalare:

$$x(t) \mapsto T[x(t)]$$

Un funzionale è lineare se:

$$T[\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)] = \lambda T[x_1(t)] + \mu T[x_2(t)]$$

Un funzionale è continuo se:

poste $\{x_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ successione di funzioni tale che $\forall_j x_j$ sia definita su un intervallo finito, e che $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ converga uniformemente (cioè assieme alle sue derivate) a $x(t)$ allora $T[x_j(t)]$ converge a $T[x(t)]$.

$$\{x_j(t)\}_{j=1}^{\infty} \xrightarrow{\text{uniformemente}} x(t)$$

\Downarrow

$$T[x_j(t)] \rightarrow T[x(t)]$$

Poniamo, inoltre D insieme di funzioni di prova. Allora un funzionale lineare e continuo su D è detto distribuzione.

Date $f(t)$ localmente sommabile (cioè per cui $\int_a^b |f(t)| dt < +\infty \quad \forall (a,b)$ finito), allora per $x(t) \in D$

$$T[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) x(t) dt$$

definisce una distribuzione.

Vi sono distribuzioni che possono essere definite saltando con una scrittura differente. f è detta funzione generalizzata.

DELTA DI DIRAC

Volendo definire il funzionale

$$T_\delta[x(t)] = x(0)$$

mediante una distribuzione, si ricorre alla seguente scrittura che fa uso della funzione generalizzata delta di Dirac che non è una funzione ordinaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) x(t) dt = x(0)$$

LIMITI DI FUNZIONI GENERALIZZATE

$$f_i(t) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} f(t) \iff \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) x(t) dt$$

Però: $\lim_{i \rightarrow +\infty} f_i(t) = f(t)$ si intende nel senso delle funzioni generalizzate.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} D_\Delta(t) = \delta(t) \quad \text{perché:}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} D_\Delta(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) x(t) dt$$

(nel senso delle funzioni generalizzate)

PROPRIETÀ DELLA DELTA DI DIRAC

1) Definizione: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) x(t) dt = x(0)$

2) Traslazione: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) x(t) dt = x(t_0)$

3) Simmetria: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) x(t) dt \Rightarrow$
 $\Rightarrow \delta(t) = \delta(-t)$

4) Integrale: $\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t)$ (D)

5) Limite: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} D_{\Delta}(t) = \delta(t)$

6) Convulsione: $x(t) * \delta(t) = x(t)$ (D)

7) Trasformata: $F[\delta(t)] = 1$

Dimostrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F[\delta(t)] x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) x(f) df =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot x(f) df$$

8) Trasformata di una costante: $F[A] = A \delta(f)$

Dimostrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F[A] x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} A \delta(f) x(f) df = A x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} A x(-t) dt = A x(0)$$

9) Trasformata di un fasore:

$$F[A e^{j2\pi f_0 t}] = A \delta(f - f_0)$$
 (D)

10) Trasformata della $u(t)$:

$$F[u(t)] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$$

Dimostrazione:

$$\text{sign}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{cases} e^{-\frac{t}{k}} & t > 0 \\ -e^{\frac{t}{k}} & t < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$F[\text{sign}(t)] = \frac{1}{j\pi f}$$

$$u(t) = \frac{\text{sign}(t)}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F[u(t)] &= \frac{1}{2} F[\text{sign}(t)] + \frac{1}{2} F[1] = \\ &= \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \end{aligned}$$

11) Trasformata dell'integrale:

$$F\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{x(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} x(0) \delta(f)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} F\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] &= F\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau\right] = \\ &= F[x(t) * u(t)] = \\ &= X(f) F[u(t)] = \\ &= \frac{x(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} x(f) \delta(f) = \\ &= \frac{x(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} x(0) \delta(f) \end{aligned}$$

RAPPRESENTAZIONE DI UN SEGNALE MEDIANTE LA FUNZIONE IMPULSIVA

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \\&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) D_{\Delta}(t-\tau) d\tau \approx \\&\approx \sum_n x(n\Delta) \cdot \Delta D_{\Delta}(t-n\Delta) \\&\text{per } \Delta \text{ sufficientemente piccolo}\end{aligned}$$

FUNZIONI IMPULSIVE PER LO STUDIO DEI SISTEMI LTI

RELAZIONE INGRESSO USCITA MEDIANTE FUNZIONE IMPULSIVA

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}y(t) &= T[x(t)] = T[x(t) * \delta(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right] = \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) T[\delta(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \\&= x(t) * h(t)\end{aligned}$$

dove $h(t)$ è la risposta impulsiva:

$$h(t) = T[\delta(t)]$$

Per la tempo-invarianza possiamo anche scrivere

$$h(t-\tau) = T[\delta(t-\tau)]$$

RISPOSTA IMPULSIVA PER SISTEMI LTI

Dimostrare che:

- $$h(t) = \frac{d}{dt} T[u(t)]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T[u(t)] &= \frac{d}{dt} T[u(t) * \delta(t)] = \\ &= \frac{d}{dt} T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right] = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau) h(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) h(\tau) d\tau = \\ &= h(t) \end{aligned}$$

Infatti, siccome $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$, allora $\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$

- Sistemi reali hanno risposte impulsive reali

- Sistemi causali hanno $h(t) \equiv 0$ per $t < 0$
Infatti la risposta $T[\delta(t)] = h(t)$ non può essere diversa da zero negli istanti che precedono quello in cui viene applicato l'impulso che è appunto $t=0$. Però, per $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ $h(t-\tau) \equiv 0$ per $\tau > t$.

- Per sistemi causali vale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

STABILITÀ I.L.U.L.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabile ingresso limitato - uscite limitate, è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Dimostrazione di sufficienza:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right|$$

Posto $|x(t)| \leq M < \infty$, si ha:

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau = M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$$

Dimostrazione della necessità:

Supponiamo $x(t) = \text{sgn}(h(t)) = \frac{|h(t)|}{h(t)}$. Allora:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(h(\tau-t)) h(\tau) d\tau$$

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(h(\tau)) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h(\tau)|}{h(\tau)} h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Perciò posto un ingresso limitato (come ad esempio $x(t)$) se l'uscita è limitata allora anche l'ultimo integrale è convergente.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E RISPOSTA IMPULSIVA

$$Y(f) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t) * h(t)] = X(f) \cdot \mathcal{F}[h(t)]$$

Si come è ovvio

$$Y(f) = X(f) H(f),$$

si ha:

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$$

Per sistemi reali $h(t)$ è reale e infatti $H(f)$ gode della simmetria hermitiana.

SISTEMI TEMPO-DISCRETI

SEGNALI TEMPO-DISCRETI

Definiamo segnale tempo discreto un segnale del tipo:

$$\{x_n\} = \dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

dove

$$x_n = x(t_n) = x(nT)$$

e T è detto tempo di campionamento, la frequenza di campionamento è: $f_s = 1/T$.

I t_n sono gli istanti di campionamento.

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE DISCRETO

$$X_s(f) = F_s[\{x_n\}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi n f T}$$

PROPRIETÀ

- X_s è periodica di periodo f_s

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} X_s(f + f_s) &= X_s\left(f + \frac{1}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi n \left(f + \frac{1}{T}\right) T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi n f T} e^{-j2\pi n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi n f T} \cdot 1 = F_s[\{x_n\}] \end{aligned}$$

- $F_s[\cdot]$ è lineare
- $\{x_n\}$ reale \Rightarrow s. Hermitiana: $X_s(f) = X_s^*(-f)$
- Traslazione Temporale: $F_s[\{x_{n-m}\}] = X_s e^{-j2\pi f m T}$

• Convulsione $F_s[\{x_n\} * \{y_n\}] = X_s(f) \cdot Y_s(f)$,
 dove $\{x_n\} * \{y_n\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} y_k$

• Trasformata delle delta di Dirac: $F_s[\{\delta_n\}] = 1$ (D)
 dove:

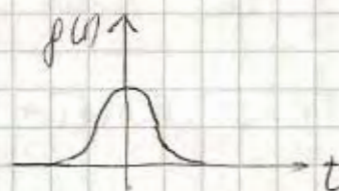
$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

• Convulsione delle delta di Dirac:

$$\{\delta_n\} * \{x_n\} = \{x_n\} \quad (D)$$

SEGNALE PAM

Pulse $p(t)$ funzione modulatrice,
 dipendente



$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k p(t-kT) = \{x_n\} * p(t)$$

Segnale PAM: Pulse Amplitude Modulation
 se p è tempo-continuo:

$$S(f) = F[\{x_n\} * p(t)] = X_s(f) G(f)$$

ANTITRASFOMATA DI FOURIER

$$x_k = \frac{1}{f_s} \int_{f_s} X_s(f) e^{j2\pi k f T} df$$

Dimostrazione:

$$\frac{1}{f_s} \int_{f_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi(n-k)fT} df = \frac{1}{f_s} f_s \cdot x_k$$

perché l'espressione è diversa da zero solo per $n=k$.

TRASFORMATA DI UN SEGNALE E TRASFORMATA DEI CAMPIONI

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) & \xrightarrow{\text{Compon.}} & x_m \\
 \downarrow F & & \downarrow F \\
 X(f) & \xrightarrow{?} & X_s(f)
 \end{array}$$

Dimostriamo che:

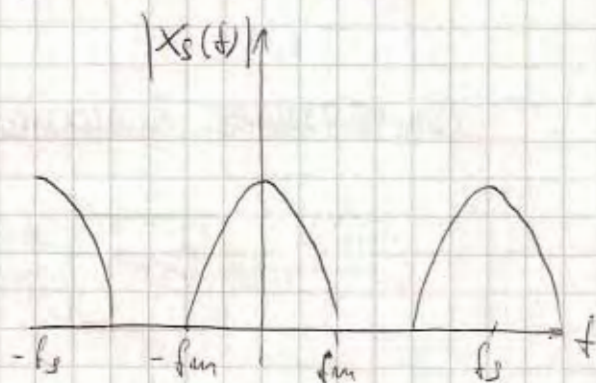
$$X_s(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f + kf_s)$$

$$\begin{aligned}
 F^{-1} \left[f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f + kf_s) \right] &= f_s \frac{1}{f_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f + kf_s) e^{j2\pi mfT} df = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} X(f + kf_s) e^{j2\pi mfT} df = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{f_s}{2} + kf_s}^{\frac{f_s}{2} + kf_s} X(\xi) e^{j2\pi m(\xi - kf_s)T} d\xi = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) e^{j2\pi m\xi T} e^{-j2\pi mk} d\xi = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi mfT} df = x(mT) = x_m
 \end{aligned}$$

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DEL TEMPO

Dunque da $X_s(f)$ possiamo risalire a $x(t)$ e quindi a $x(t)$ se e solo se

$$f_s \geq 2 f_m$$



che rappresenta la condizione di non-aliasing

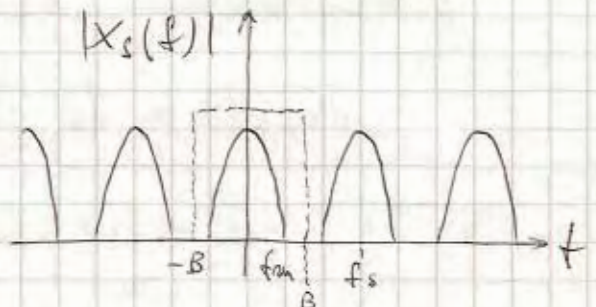
ESPRESSIONE DI UN SEGNALE IN FUNZIONE DEI SUOI CAMPIONI

Cerchiamo una funzione $p(t)$, tale che:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k p(t - kT)$$

Scriviamone la trasformata:

$$X(f) = X_s(f) G(f)$$



Posto $f_m < B < f_s$, la $G(f)$

deve essere $\frac{1}{f_s}$ per $-B < f < B$ e zero elsewhere, infatti:

$$X(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f + kT) G(f)$$

l'antitrasformata della $G(f)$ così definita è:

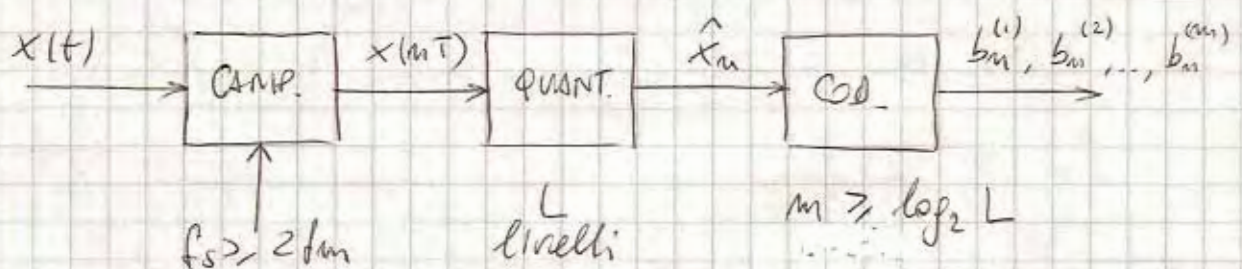
$$g(t) = \frac{2B}{f_s} \text{sinc}(2Bt) \quad \text{Se scegliamo } B = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

risulta: $p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$, quindi:

$$x(t) = \{x_n\} * \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

CONVERSIONI A/D E D/A

CONVERSIONE ANALOGICO-DIGITALE

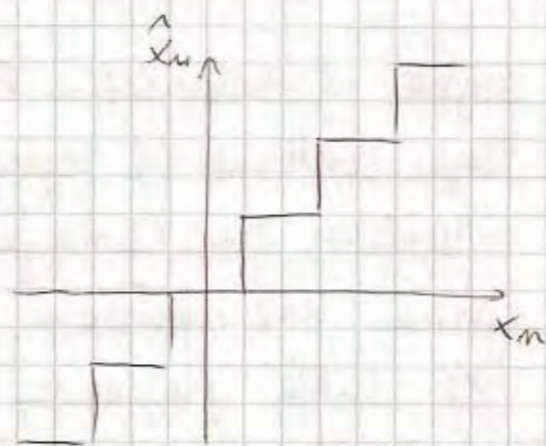


La quantizzazione discretizza i valori che possono assumere i campioni $x_n = x(nT)$.

de quantizzazione comporta
 una perdita d'informazione
 irreversibile.

Il segnale in uscita
 del codificatore ha
 un bit rate pari a

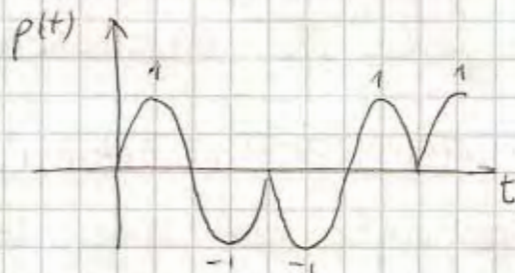
$$B_r = f_s \cdot m \quad \text{bit/sec}$$



SEGNALE PCM

Il segnale PCM (Pulse Code Modulation) ha
 l'espressione:

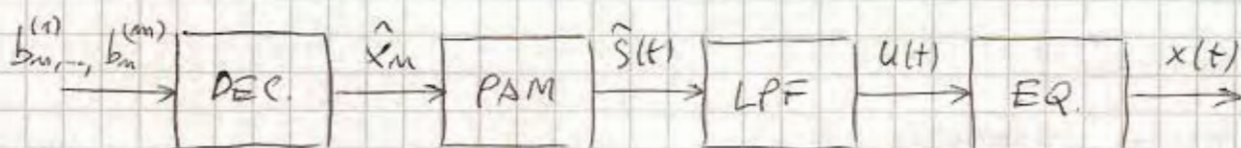
$$p(t) = \sum_i a_i p(t - iT_{\text{bit}})$$



dove $T_{\text{bit}} = T/m$ e

$a_i = 1$ se $b_i = 1$ oppure $a_i = -1$ se $b_i = 0$.

CONVERSIONE DIGITALE-ANALOGICA



Il segnale $\hat{s}(t)$ ha espressione:

$$\hat{s}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{x}_m p(t - mT) \approx s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m p(t - mT)$$

$$\hat{S}(f) \approx S(f) = X_s(f) G(f) = f \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f + k f_s) G(f)$$

Il Low Pass Filter (LPF) ha la funzione di
 tagliare tutte le ripetizioni periodiche delle $X(f + k f_s)$
 eccetto quella centrale a più basse frequenze.

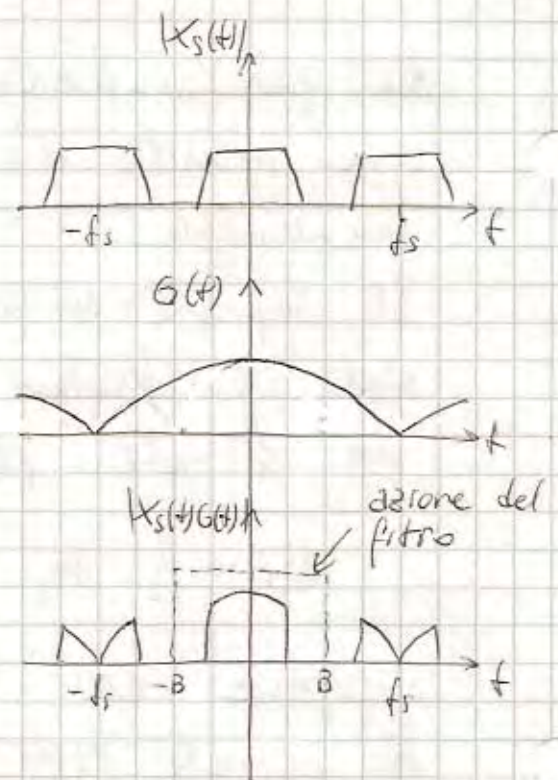
Infatti il modulatore PAM rende
 tempo continuo il segnale \hat{x}_n
 impulso ma contemporaneamente
 genera una ripetizione periodica
 X_s sulle frequenze.

$$U(f) = f_s X(f) G(f)$$

d'equalizzatore, con funzione
 di trasferimento $H(f) = \frac{1}{f_s G(f)}$
 che al compito di distorcere

in modo inverso rispetto a quanto

ha fatto il modulatore PAM sul segnale $X(f)$.



SISTEMI LTI TEMPO-DISCRETI

Rispondono ad una sequenza tempo-discreta con
 una sequenza tempo-discreta. Possono essere:

- Reali;
- Lineari;
- tempo Invarianti;
- causali;
- senza memoria.

RISPOSTA IMPULSIVA E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

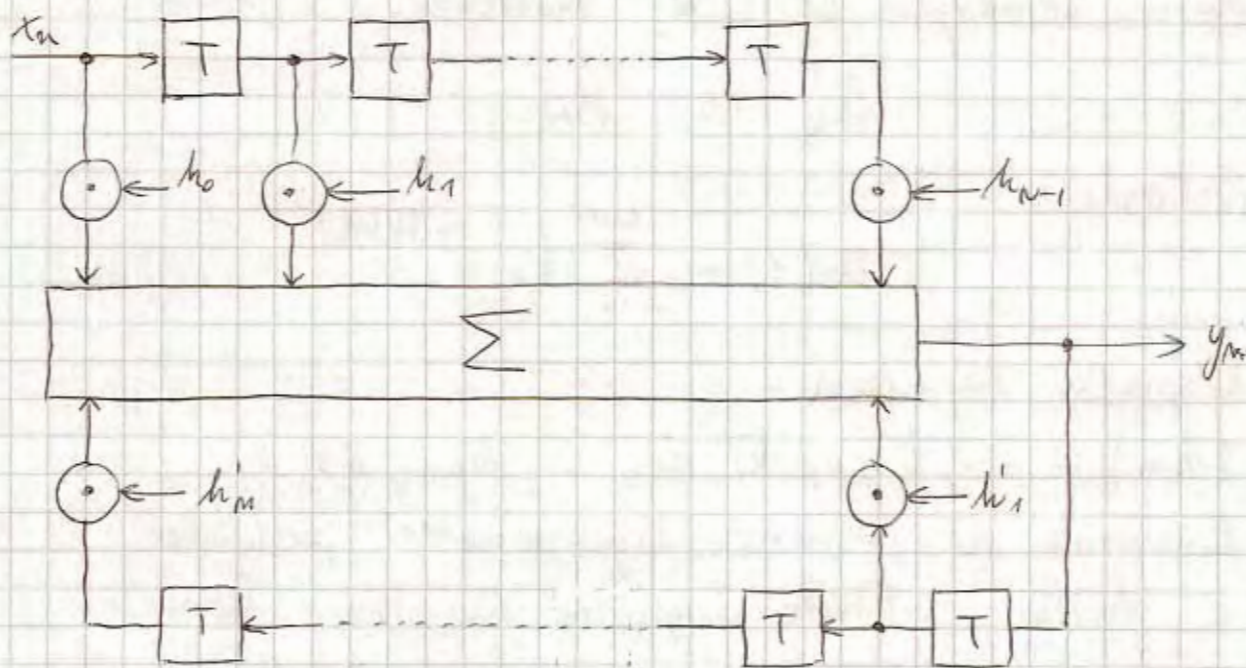
$$\{y_n\} = \{x_n\} * \{h_n\}$$

dove $\{h_n\} = T[\{g_n\}]$ (1)

$$H_s(f) = \frac{Y_s(f)}{X_s(f)}$$

è la funzione di trasferimento ed è f_s -periodica.

FILTRI TEMPO-DISCRETI CON LINEE DI RITARDO



FILTRO IIR

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^M h'_k y_{n-k}$$

$$Y_s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k X_s(t) e^{-j2\pi k t T} + \sum_{k=1}^M h'_k Y_s(t) e^{-j2\pi k t T}$$

$$H_s(t) = \frac{Y_s(t)}{X_s(t)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j2\pi k t T}}{1 - \sum_{k=1}^M h'_k e^{-j2\pi k t T}}$$

Periodica con periodo $f_s = 1/T$

Risposte impulsive:

$$\{h_n\} = \dots, 0, 0, 0, h_0, h_1 + h_0 h'_1, \dots$$

è una risposta infinite, per questo sono Infinite Impulse Response possono essere instabili e sono per forza distortivi.

FILTRI FIR

Sono analoghi ai IIR, tuttavia:

$$h'_k = 0 \quad \forall k$$

Per tanto:

$$H_s(f) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j2\pi k f T}$$

Risposte impulsive:

$$\{h_n\} = \dots, 0, 0, 0, h_0, h_1, \dots, h_{N-1}, 0, 0, 0, \dots$$

Possiedono N termini significativi, pertanto è finita: Finite Impulse Response. Sono sempre stabili e possono avere caratteristiche di fase lineare se opportunamente progettati.

FILTRI PURAMENTE RICORSIVI

Assomigliano ai IIR anche come caratteristiche, tuttavia:

$$h_0 \neq 0, \quad h_k = 0 \quad \forall k \neq 0$$

$$H_s(f) = \frac{h_0}{1 - \sum_{k=1}^m h'_k e^{-j2\pi k f T}}$$

PROGETTO DEI FILTRI FIR

Consiste nella determinazione del numero N di coefficienti e del loro valore. Adottiamo il metodo delle finestre. Supponiamo $H_d(f)$ funzione di trasferimento desiderata.

- 1) Calcolare $h_d(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_d(f)]$
- 2) Traslare $h_d(t)$ a destra di t_0 quanto basta per renderla causale: $h_d(t) = h_d(t - t_0)$

3) Calcolare la trasformata di $h'_d(t)$
 $F[h'_d(t)] = F[h_d(t-t_0)] = H_d(f) e^{-i2\pi f t_0}$.

Si noti che la funzione di trasferimento desiderata viene solo sfasata (ritardata) e non cambia le proprie caratteristiche di ampiezza. Queste sono le le F.d.T. del filtro.

4) I coefficienti del filtro si ricavano come campioni della $h'_d(t)$:

$$h_k = h'_d(kT)$$

TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

$$\begin{array}{ccc} x(t) \mapsto X(f) & x_n \mapsto X_s(f) & \underline{x} \mapsto \underline{X} \\ \text{CONT.} & \text{CONT.} & \text{DISCR.} & \text{DISCR.} \end{array}$$

$$\underline{x} = \{x_n\}_{n=0}^{N-1} = x_0, \dots, x_{N-1}, \quad \underline{X} = \{X_q\}_{q=0}^{N-1} = X_0, \dots, X_{N-1}$$

$$\text{DFT: } X_q = \text{DFT}[\underline{x}] = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i2\pi \frac{mq}{N}} \quad (q=0, \dots, N-1)$$

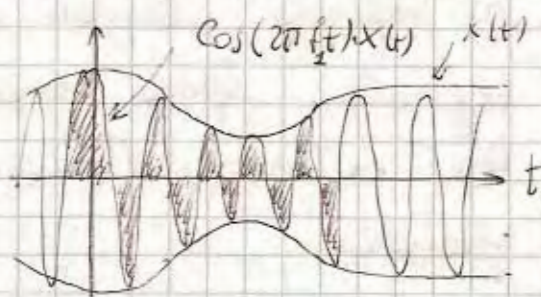
$$\text{IDFT: } x_m = \text{IDFT}[\underline{X}] = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{i2\pi \frac{mq}{N}} \quad (m=0, \dots, N-1)$$

APPLICAZIONE DELLA DFT

Esempio di calcolo di una FT per un calcolatore:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

Il calcolatore svolge i prodotti $x(t) \cdot \cos(2\pi f t)$ e $x(t) \cdot \sin(2\pi f t)$ e calcola gli integrali numericamente



Sommando alle ore fissate una certa frequenza:

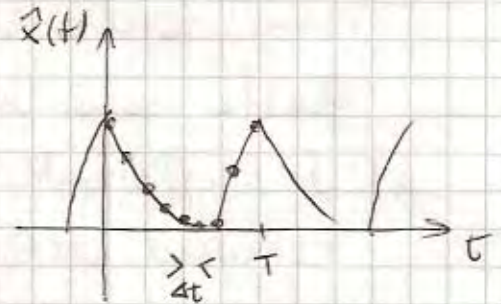
$$X(f_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_1 t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f_1 t) dt$$

$X(f_2) = \dots$ e trova (per punti) la $X(f)$.

Il calcolo è molto lungo e complesso.

Metodo delle DFT:

- 1) Si calcola la ripetizione periodica $\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$;
- 2) Si prendono in $[0, T]$ N campioni delle $\hat{x}(t)$ con $\Delta t = T/N$;

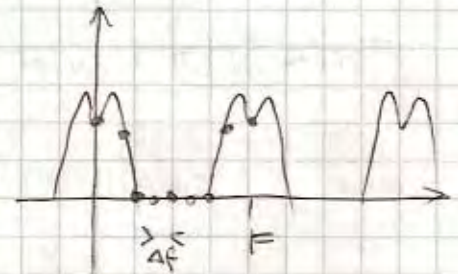


- 3) Si considera la ripetizione periodica delle trasformate (cercare se conoscente) del

segnale: $X(f) = F[x(t)] \mapsto$

$$\mapsto \hat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f-kF)$$

- 4) Si considerano N campioni in $[0, F]$ delle $\hat{X}(f)$ con $\Delta f = F/N$.



Allora si ha: $\underline{\hat{x}} = \{\hat{x}(n\Delta t)\}_{n=0}^{N-1}$, $\underline{\tilde{X}} = \{\tilde{X}(q\Delta f)\}_{q=0}^{N-1}$

$$\underline{\tilde{X}} = \Delta t \cdot \text{DFT}[\underline{\hat{x}}], \quad \underline{\hat{x}} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \text{IDFT}[\underline{\tilde{X}}]$$

con: $F \cdot T = N$

Attenzione! L'algoritmo ritorna i campioni della ripetizione periodica delle trasformate e prende in ingresso i campioni della ripetizione periodica del segnale. Operare sempre sulle ripetizioni periodiche! Per evitare l'aliasing conviene prendere N grande.

SEGNALI AD ENERGIA FINITA E A POTENZA FINITA

ENERGIA E POTENZA

Se dato il segnale $x(t)$. Il suo valore medio in $[-T_0/2, T_0/2]$ è:

$$\bullet \langle x(t) \rangle_{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

In generale:

$$\bullet \langle x(t) \rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

Se $x(t)$ è T -periodica:

$$\bullet \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

La sua potenza istantanea è:

$$\bullet p(t) = |x(t)|^2$$

Si misura in $[V^2]$. È come le potenze dissipate su una resistenza di 1Ω .

La potenza e la potenza istantanea medie:

$$\bullet P = \langle p(t) \rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

Se $0 < P < \infty$ si dice che il segnale è a potenza finita.

Energia del segnale:

$$\bullet E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Se $0 < E < \infty$ il segnale è a energia finita.

Energia finita \Rightarrow potenza nulla

Potenza finita \Rightarrow Energia infinita

Potenza finita $\Rightarrow x(t)$ non è F-trasformabile

Se il segnale è periodico:

$$P = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt$$

Valore efficace del segnale:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{P} = \sqrt{\langle |x(t)|^2 \rangle}, \quad P = x_{\text{eff}}^2$$

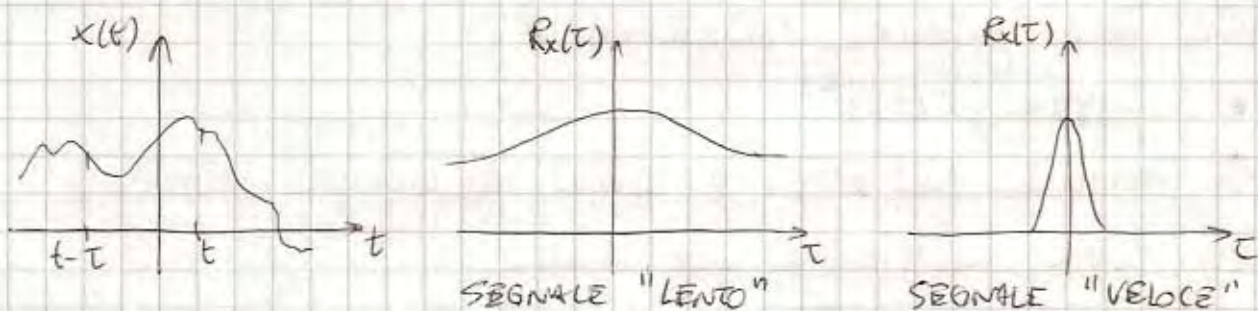
SEGNALI AD ENERGIA FINITA

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

La funzione di autocorrelazione di un segnale ad energia finita è definita come:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t-\tau) dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

Indica la rapidità con cui varia il segnale $x(t)$



Fissato τ , se la funzione $x(t)$ varia lentamente, $x(t)$ e $x(t-\tau)$ saranno simili e avranno lo stesso segno e il loro prodotto sempre positivo e la funzione di autocorrelazione assume un andamento più piatto.

Avverrà l'opposto se la funzione x varia rapidamente.

Spettro di energia (o densità spettrale di energia) di un segnale $x(t)$:

$$E_x(f) = |X(f)|^2$$

Proprietà delle funzione di autocorrelazione:

- $F[R_x(\tau)] = E_x(f)$

$$F[R_x(\tau)] = F[X(t)] \cdot F[X^*(-\tau)] = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2$$

- $R_x(0) = E$ (1)

- $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ (2)

- $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$

$$|R_x(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t-\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x^*(t-\tau)|^2 dt = E \cdot E = E^2 = R_x(0)^2$$

- $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} R_x(\tau) = 0$

TRASFORMAZIONI LTI E SPETTRO DI ENERGIA

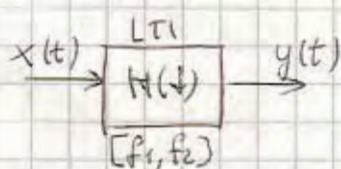
$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

Dimostrazione:

$$R_y(\tau) = y(t) * y^*(t-\tau) = (x(t) * h(t)) * (x^*(t-\tau) * h^*(t-\tau)) = (x(t) * x^*(t-\tau)) * (h(t) * h^*(t-\tau)) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

$$E_y(f) = F[R_y(\tau)] = F[R_x(\tau)] F[R_h(\tau)] = E_x(f) |H(f)|^2$$

Essendo $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) df$, vogliamo verificare che la E_x integrate su un intervallo di frequenze qualsiasi, fornisce l'energia del segnale nella banda considerata. Poniamo:



$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } f_1 < f < f_2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\text{Allora: } E_y = E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{[f_1, f_2]}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) df = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) |H(f)|^2 df = \int_{f_1}^{f_2} E_x(f) df.$$

Con questo, ora è dimostrato.

- $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow R_x(\tau)$ pari $\Rightarrow E_x(f)$ pari

Di conseguenza lo spettro dovrebbe essere bilatero. Nel caso di un passa-banda ideale $[f_1, f_2]$, si ha:

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) |H(f)|^2 df = \\ = \int_{-f_2}^{-f_1} E_x(f) df + \int_{f_1}^{f_2} E_x(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} E_x(f) df = \\ = \int_{f_1}^{f_2} E_x^{\text{monolatero}}(f) df = 2E_{[f_1, f_2]}$$

Dove abbiamo definito:

$$E_x^{\text{monolatero}}(f) = \begin{cases} 2E_x(f) & \text{se } f \geq 0 \\ 0 & \text{se } f < 0 \end{cases}$$

SEGNALI A POTENZA FINITA

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_x(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) x^*(t-\tau) dt = \langle x(t) x^*(t-\tau) \rangle$$

Proprietà:

- $R_x(0) = \langle p(t) \rangle = P$ (1)
- $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ (1)
- $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$ (1)

TRASFORMAZIONI LTI E SPETTRO DI POTENZA

Parliamo di segnali a potenza finita, dunque non è possibile trasformarli secondo Fourier

$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$, dove
 $R_y(\tau) = \langle y(t) y^*(t-\tau) \rangle$, $R_x(\tau) = \langle x(t) x^*(t-\tau) \rangle$,
 $R_h(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau)$, poiché $h(t)$ in realtà è trasformabile.

$$F[R_y(\tau)] = F[R_x(\tau)] F[R_h(\tau)] = G(f) \cdot |H(f)|^2$$

Dove abbiamo definito lo spettro di potenza

$$G(f) \triangleq F[R_x(\tau)]$$

(o densità spettrale di potenza) come la trasformata della funzione di autocorrelazione di un segnale a potenza finita. Segue:

$$R(\tau) = F^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi f\tau} df \Rightarrow$$

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = P \quad \text{Un risultato importante!}$$

$$\text{Inoltre: } G_y(f) = G_x(f) |H(f)|^2.$$

Come per i segnali ad energia finita:

$$P_y = P_{x_{[f_1, f_2]}} = \int_{f_1}^{f_2} G(f) df \quad \text{se consideriamo la banda } [f_1, f_2]$$

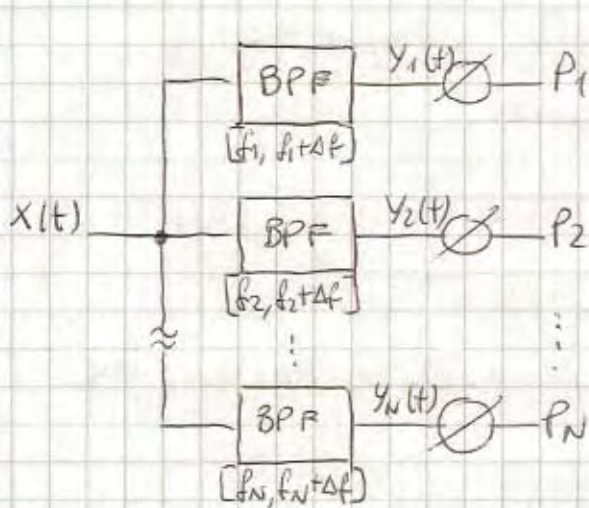
Inoltre: $x(t)$ reale $\Rightarrow R_x(\tau)$ pari $\Rightarrow G(f)$ pari

È sempre definita lo spettro monocoloro come:

$$G_x^{\text{monocol.}}(f) = \begin{cases} 2G_x(f) & \text{per } f \geq 0 \\ 0 & \text{per } f < 0 \end{cases} \Rightarrow P_y = \int_{f_1}^{f_2} G_x^{\text{monocol.}}(f) df$$

Se consideriamo un pozzo banda ideale $[f_1, f_2]$

MISURA DELLO SPETTRO DI POTENZA



$$P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{y_m}(f) df = \int_{f_m}^{f_m + \Delta f} 2G_x(f) df \stackrel{\Delta f \text{ piccolo}}{\approx} \\ \approx 2G_x(f_m) \cdot \Delta f \Rightarrow \\ G_x(f_m) = \frac{P_m}{2 \cdot \Delta f}$$

BANDA DI UN SEGNALE A POTENZA FINITA

Non disponendo dello spettro del segnale a potenze finite (non esiste la sua trasformata) ne definiamo le bande come segue: intervallo del semiasse positivo delle frequenze nel quale lo spettro di potenza del segnale è significativamente diverso da zero.

RELAZIONE FRA SPETTRO DI POTENZA E ANALISI DI FOURIER

Dato $x(t)$ a potenze finite, definiamo:

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che $x_{T_0}(t)$ è F-trasformabile. segue:

$$X_{T_0}(f) = F[x_{T_0}(t)], \quad E_{x_{T_0}} = |X_{T_0}(f)|^2$$

$$E_{x_{T_0}} = \int_f^{f+\Delta f} E_{x_{T_0}}(f) df. \quad \text{Inoltre:}$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_f^{f+\Delta f} \frac{|X_{T_0}(f)|^2}{T_0} df = \int_f^{f+\Delta f} G_x(f) df \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_f^{f+\Delta f} \frac{|X_{T_0}(f)|^2}{T_0} df = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_f^{f+\Delta f} G_x(f) df = G_x(f)$$

SPETTRO DI POTENZA PER SEGNALI ESPRIMIBILI COME SOMMA DI FASORI.

$$x(t) = \sum_n A_n e^{j2\pi f_n t} = \sum_N A_n (\cos(2\pi f_n t) + j \sin(2\pi f_n t))$$

è un segnale evolutivamente a potenza finita. Perciò:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \langle x(t) x^*(t-\tau) \rangle = \\ &= \left\langle \sum_n A_n e^{j2\pi f_n t} \sum_k A_k^* e^{-j2\pi f_k (t-\tau)} \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_n \sum_k A_n A_k^* e^{j2\pi f_k \tau} e^{j2\pi (f_n - f_k) t} \right\rangle = \\ &= \sum_n \sum_k A_n A_k^* e^{j2\pi f_k \tau} \langle e^{j2\pi (f_n - f_k) t} \rangle = \\ &= \sum_n |A_n|^2 e^{j2\pi f_n \tau} \end{aligned}$$

Segue: $G_x(f) = F[R_x(\tau)] = \sum_n |A_n|^2 \delta(f - f_n)$

Nel caso specifico di un segnale espresso mediante serie di Fourier, si ha:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \Rightarrow G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta(f - n f_0)$$

SUCCESSIONI TEMPORALI AD ENERGIA FINITA E POTENZA FINITA

DEFINIZIONI

$$\{x_n\} = \dots, x_2, x_1, x_0, x_1, x_2, \dots$$

• Valore medio: $\langle x_n \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n$

• Energia: $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2$

• Potenza: $P = \langle |x_n|^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$

$0 < E < \infty \Rightarrow$ Energia finita

$0 < P < \infty \Rightarrow$ Potenza finita

ENERGIA FINITA

$$R_x(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m x_{m-k}^*$$

Proprietà:

• $R_x(0) = E$ (1)

• $R_x(k) = R_x^*(-k)$ (1)

• $|R_x(k)| \leq R_x(0)$ (1)

POTENZA FINITA

$$R_x(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N x_m x_{m-k}^* = \langle x_m x_{m-k}^* \rangle$$

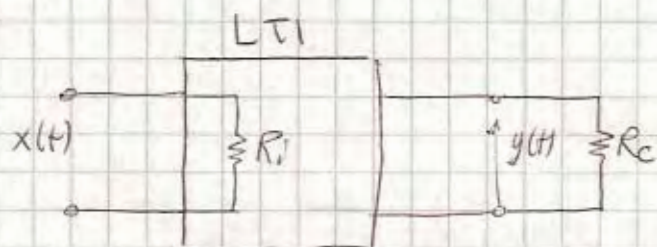
Proprietà:

• $R_x(0) = P$

• $R_x(k) = R_x^*(-k)$

• $|R_x(k)| \leq R_x(0)$

GUADAGNO, ATTENUAZIONE, DECIBEL



R_i : resistenza d'ingresso

R_c : resistenza di carico

$x(t) = V_{xm} \cos(2\pi f t + \varphi_x) \Rightarrow$

$y(t) = V_{ym} \cos(2\pi f t + \varphi_y)$

$$P_{\text{elettrica}} = \langle x(t) \cdot i_x(t) \rangle = \langle x(t) \frac{x(t)}{R_i} \rangle = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{R_i} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{2} \frac{1}{R_i}$$

$$P_{\text{elettrica}} = \langle y(t) i_{\text{out}}(t) \rangle = \langle y(t) \frac{y(t)}{R_e} \rangle = \frac{\langle y^2(t) \rangle}{R_e} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{2} \frac{1}{R_e}$$

Queste sono potenze in watt, mentre $\langle x^2(t) \rangle$ è una potenza in volt² (come anche $\langle y^2(t) \rangle$).

Guadagno del quadripolo:

$$G = \frac{P_{\text{elettrica}}}{P_{\text{elettrica}}} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{V_{\text{rms}}^2} \frac{R_i}{R_e} = \frac{P_u}{P_i} \frac{R_i}{R_e}$$

$$R_i = R_e \Rightarrow G = \frac{V_{\text{rms}}^2}{V_{\text{rms}}^2} = |H(f)|^2$$

Attenuazione del quadripolo:

$$A = \frac{1}{G}$$

Guadagno in decibel:

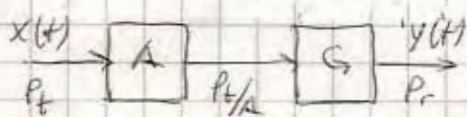
$$G[\text{dB}] = 10 \log_{10} G = 10 \log_{10} \frac{P_u}{P_i} = 20 \log_{10} \frac{V_{\text{rms}}}{V_{\text{rms}}}$$

$$G = 10 \frac{G[\text{dB}]}{10}$$

Potenza in dBw e dBm:

$$P[\text{dBw}] = 10 \log_{10} \frac{P[\text{W}]}{1[\text{W}]}$$

$$P[\text{dBm}] = 10 \log_{10} \frac{P[\text{W}]}{10^{-3}[\text{W}]} = 10 \log_{10} \frac{P[\text{mW}]}{1[\text{W}]} = 30 + P[\text{dBw}]$$



$$P_R = P_t \frac{G}{A}$$

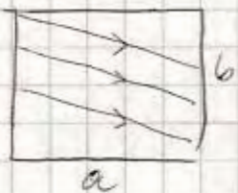
$$P_r[\text{dBw}] = P_t[\text{dBw}] - A[\text{dB}] + G[\text{dB}]$$

$$P_r[\text{dBm}] = P_t[\text{dBm}] - A[\text{dB}] + G[\text{dB}]$$

SEGNALI ANALOGICI IN BANDA BASE E PASSA BANDA

SEGNALE VIDEO IN B/N

Frequenze d'immagine: $f_i = \begin{cases} 25 \text{ immagini/sec (Europa)} \\ 30 \text{ immagini/sec (USA, Giappone)} \end{cases}$

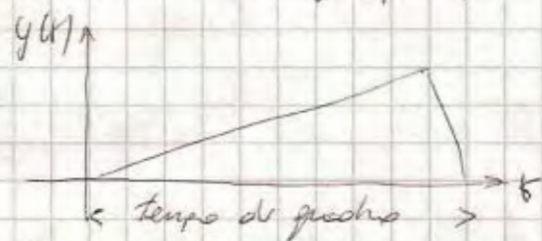


Formato di frame:
 $a/b = 4/3$

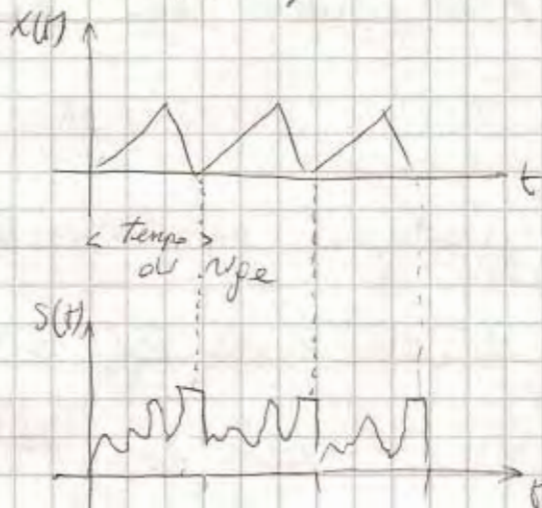
N : Righe di un quadro: 625 (Europa), 525 (USA, Giappone)

$y(t)$: Sincronismo verticale

$x(t)$: Sincronismo orizzontale



Durante il ritorno e capo di righe la luminanza è "nere".
La luminanza ha un'importante componente periodica, quindi il suo spettro presenterà delle righe.



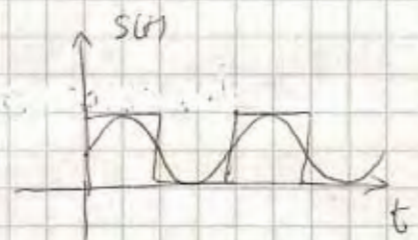
STIMA DELL'IMPEGNO DI BANDA

Secelezionare un B/N \Rightarrow max variabilità di $s(t)$.

Numero quadretti per quadro: $\frac{ab}{(b/N)^2} = \frac{a}{b} N^2$

Numero quadretti al secondo: $f_i \frac{a}{b} N^2$

L'onda quadro di luminanza viene approssimata con una sinusoidale la cui $f_{min} = 0$ e la $f_{max} = \frac{1}{2} f_i \frac{a}{b} N^2$



Si ottiene $f_{max} = 6,5 \text{ MHz}$ che in realtà diventano 5 MHz .

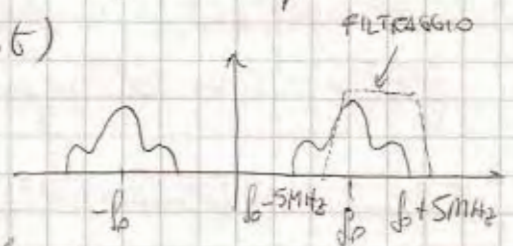
Per ovviare al problema dello spegnimento dei fosfori durante la composizione del quadro, si ricorre alla scansione interlacciata.

SEGNALE VIDEO A RF

$\lambda f = c$. Occorre modulare il segnale in bande basse perché: 1) l'etere si comporta come un canale passa-bande; 2) le antenne sarebbero troppo lunghe.

$$S_{RF}(t) = S(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Perché $S_{RF}(t)$ sarà simmetrico su f_0 , possiamo filtrare una parte per ottenere un'occupazione di banda di circa 6,75 MHz.



SEGNALE VIDEO A COLORI

Si generano 3 segnali $X_R(t)$, $X_B(t)$, $X_G(t)$ ognuno di banda $[0, 5 \text{ MHz}]$. Per mantenere la retrocompatibilità con lo standard B/N si trasmettono 3 segnali:

- $S(t) = X_R(t) + X_B(t) + X_G(t) \rightarrow$ (luminanza)
 - $\Delta R(t) = X_R(t) - S(t)$
 - $\Delta B(t) = X_B(t) - S(t)$
- } \rightarrow (crominanza)

Del quadro è possibile ricostruire le 3 componenti.

RIDUZIONE DELL'OCCUPAZIONE DI BANDA

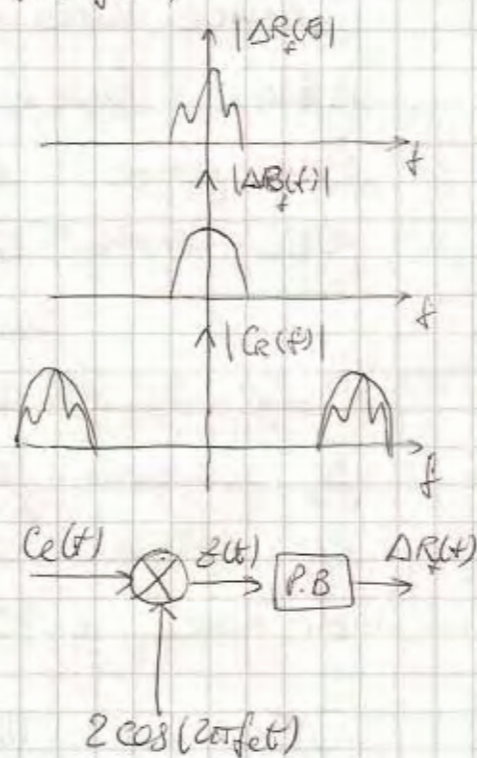
Essendo l'occhio umano meno sensibile alle variazioni di crominanza rispetto a quelle di luminanza, si tronca la banda di $\Delta R(t)$ e $\Delta B(t)$

da $[0; 5]$ MHz a $[0; 1]$ MHz. Il segnale nel dominio del tempo risulterà più "smussato".

Si genera il segnale:

$$C_r(t) = \Delta R_f(t) \cos(2\pi f_c t) - \Delta B_f(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Il segnale $\Delta R_f(t)$ si può ricostruire modulando $C_r(t)$ con un $2 \cos(2\pi f_c t)$ e $\Delta B_f(t)$ con un $2 \sin(2\pi f_c t)$ e applicando un filtro P.B. al segnale demodulato



$$\begin{aligned} S(t) &= \Delta R_f(t) \cos(2\pi f_c t) 2 \cos(2\pi f_c t) + \\ &\quad - \Delta B_f(t) \sin(2\pi f_c t) 2 \cos(2\pi f_c t) = \\ &= \Delta R_f(t) 2 \cos^2(2\pi f_c t) + \\ &\quad - \Delta B_f(t) 2 \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t) = \\ &= \Delta R_f(t) (1 + \cos(2\pi 2f_c t)) + \\ &\quad - \Delta B_f(t) \sin(2\pi 2f_c t) \end{aligned}$$

Il segnale $C_r(t)$ ha un'occupazione di banda di 2 MHz e per farlo rientrare nei 6,75 MHz di banda del segnale B/N a RF lo si pone in uno degli ovali laterali dello spettro di $S(t)$ (che ha una componente a ripple accentuato) situato a $f_c + 4,63$ MHz.