OSCILLAZIONI

MOTI PERIODICI E ARMONICI

Periodo T: $r(t+nT) = r(t)$

Frequenza, pulsazione:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Equazione armonica:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega_0^2 f(t) = 0$$

Soluzione

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

OSCILLATORE ARMONICO

$x(0) = A\cos\varphi_0 \qquad v_x(0) = -\omega_0 A \sin\varphi_0$

SOLUZIONI COMPLESSE

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \implies z = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Soluzioni reali $\implies$ $C_1 = C_2^*$

$$C_1 = \frac{A}{2} e^{i\varphi_0}, \; C_2 = \frac{A}{2} e^{-i\varphi_0} \implies$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

OSCILLATORE ARMONICO

$\bar{f}_e = -kx\hat{i}$ (forza elastica)

$F = ma \Rightarrow m\ddot{x} - kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ENERGIA

$x(t) = A\cos(\varphi)$, $V(t) = \frac{1}{2}kx^2$, $K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow$

$E_M = V + K = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2$

PUNTI D'EQUILIBRIO S^*

Equilibrio $\Rightarrow V'(S^*) = 0$, minimo $\Rightarrow V''(S^*) > 0$

Taylor $\Rightarrow V(S) - V(S^*) = (S - S^*)\, V''(S) \cdot \frac{k}{2}$ $(k > 0)$

OSCILLAZIONI ELETTRICHE

CIRCUITI LC

$L \Leftrightarrow m$, $\frac{1}{C} \Leftrightarrow k$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$

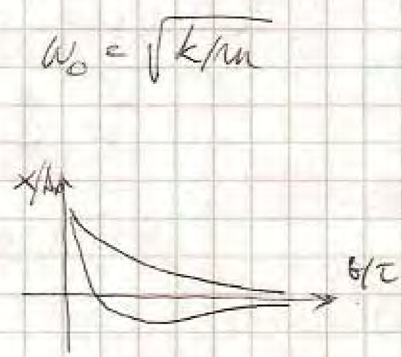
OSCILLAZIONI SMORZATE

Equazione: $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$, $\gamma = \beta/m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

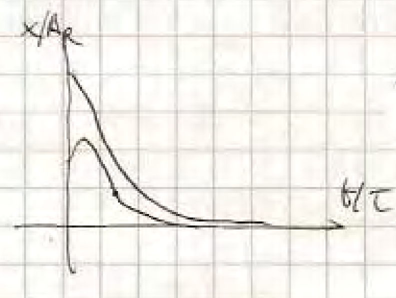
$\gamma^2 = 4\omega_0^2 \Rightarrow$ CRITICO

$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}$



$\gamma^2 > 4\omega_0^2 \Rightarrow$ SUPERCRITICO

$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

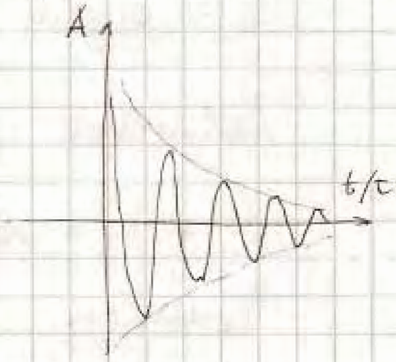


$\gamma^2 < 4\omega_0^2 \Rightarrow$ SOTTOCRITICO

$$x(t) = C_1 e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega_1)t} =$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}} \left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} \right) =$$

$$= A e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$



Tempo caratteristico : $\tau = 1/\gamma$

Radici : $-\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_1 = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

Pseudo periodo $T = 2\pi/\omega_1$, $\omega_1 < \omega_0$

Energia media: $\langle E_M \rangle = \left(\frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$

τ: Tempo dopo il quale E_m decresce di $1/e$

CIRCUITO RLC

$$L \frac{d^2 q}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow$$

$$L \Leftrightarrow m, \quad R \Leftrightarrow \beta, \quad \frac{1}{C} \Leftrightarrow k \Rightarrow$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

OSCILLAZIONI FORZATE

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F(t)$, F somma di coseni $\Rightarrow$

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t = Re\{F_0 e^{i\omega t}\}$

Soluzione: omogenea + particolare

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}, \qquad x(t) = A e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) A e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) m} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{\chi} \equiv \frac{F_0 e^{i\omega t}}{i\omega Z_m}$$

Z_m: impedenza meccanica

$x(t)$ reale $\Rightarrow$ $x(t) = \frac{F_0}{|\chi|} \cos(\omega t - \delta)$

$\delta = \arg \chi$

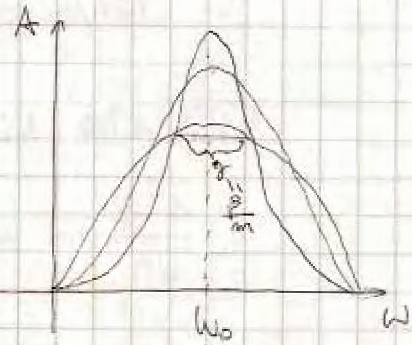
Soluzione generale: omogenea + particolare:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + B e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

Soluzione stazionaria:

$$x(t) = \frac{F_0}{|\chi|} \cos(\omega t - \delta)$$

1) $\omega = \omega_{esterna}$
2) $\frac{F_0}{\chi}$ = ampiezza: non dipende da c.i.
3) Dipende da differenza pulsazioni (risonanza)
4) Oscillazione sfasata di δ



Massimo per $\omega = \omega_0 \Rightarrow \delta = \pi/2$.

$\beta \to 0$, $\gamma \to 0 \Rightarrow$ ampiezza max $\to \infty$

Funzione di risposta:

$$R(\omega) = \frac{\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{m\gamma^2\omega^2}{|\chi|^2} = \frac{\beta^2\omega^2}{m|\chi|^2}$$

ONDE ELASTICHE

EQUAZIONE D'ALAMBERT

Onde progressive: $y(x,t) = f(x - vt)$

Onde regressive: $y(x,t) = f(x + vt)$

$w = x \mp vt \Rightarrow y(x,t) = f(w)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mp v \frac{\partial y}{\partial w} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial w} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \mp v \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mp v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial y}{\partial t^2}$$

$$y = f(x, y, z, t) \Rightarrow \nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

ONDE PIANE

$y = f(\bar{r} \cdot \hat{u}_n \pm vt)$, il luogo dei pti in cui f ha un determinato valore in un dato istante è un piano perpendicolare a $\hat{u}_n$.

Velocità piano: $\bar{v} = \mp v \hat{u}_n$

Soluzione generale delle onde (ottenute per combinazione lineare):

$$\varphi = f(x - vt) + g(x + vt)$$

ONDE SFERICHE

$$\varphi = \frac{g(\theta, \varphi)}{r} f(r \mp vt)$$

r: raggio. Ampiezza va come $\frac{1}{r}$

ONDE PIANE ARMONICHE

$$f = A\cos(k(x-vt)) = A\cos(kx-\omega t)$$

Numero d'onda: $k = \omega/v$
Velocità di fase $v = \omega/k$ (punto a fase fissa)

Relazione di dispersione $v_f = \dfrac{\omega}{k}$
$v_f = \text{cost}\ \forall k \Rightarrow$ mezzo non dispersivo.

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT,\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu};\quad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}}$$

$$f = A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

v, λ, k dipendono dal mezzo
ν, ω dipendono dalla sorgente.

Se tridimensionale:

$$f = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$\vec{k}$: vettore d'onda.

Onda non armonica rappresentabile come somma di sinusoidi. Se le velocità sono diverse, l'onda si deforma.

ONDE DISPERSIVE

Il profilo non cambia:
$f(x+dx, t+dt) = f(x,t)$, $dx = v\,dt \Rightarrow$

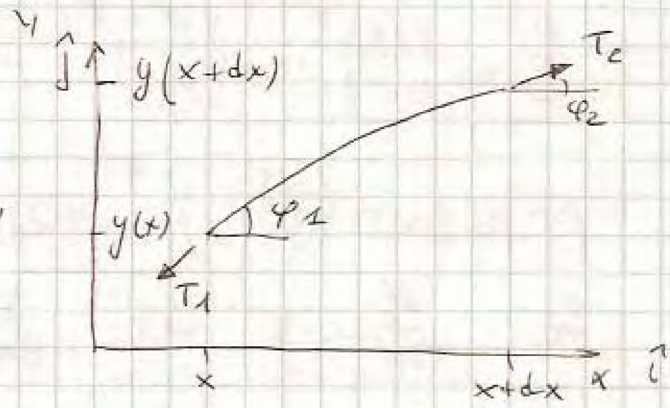
$$f((x+dx) - v(t+dt)) = f((x-vt)+0) = f(x-vt)$$

ONDE TRASVERSALI SU UNA CORDA

$\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow$

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \mu\, dx\, \bar{a}$

Forze lungo $\hat{\imath}$ trascurabili perché si annullano a vicenda. Lungo $\hat{\jmath}$:



$$F_y = T_2 \sin\varphi_2 - T_1 \sin\varphi_1 \simeq T_2 \operatorname{tg}\varphi_2 - T_1 \operatorname{tg}\varphi_1 \simeq$$

$$\simeq T(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1) \Rightarrow$$

$$T(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1) = \mu\, dx\, a_y = \mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Per definizione di derivata:

$$T\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right) = T(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1) \simeq$$

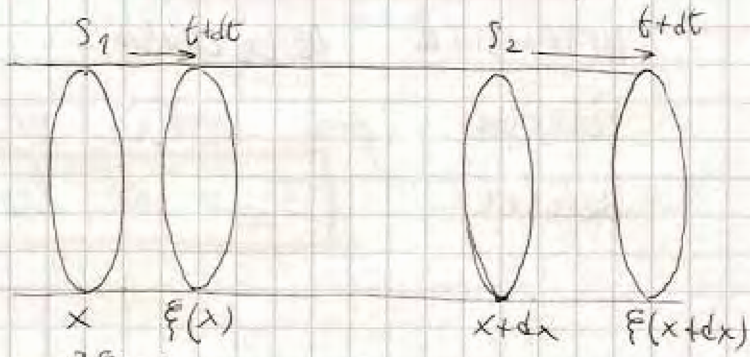
$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx \quad (\text{per Taylor}) \rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{equazione d'Alembert})$$

ONDE ELASTICHE NEI GAS

$dV = S\, dx$, $dm = \rho_0\, dV$

Traslazione cilindro:



$$dV(t+dt) =$$

$$= S(dx + \xi(x+dx) - \xi(x))$$

$$= S(dx + d\xi) \simeq S\, dx\left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x\right)$$

$$dm = \text{cost} \Rightarrow \rho_0 S\, dx = \rho S\, dx\left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x}$$

Trasformazione adiabatica e gas perfetto $\Rightarrow$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \Rightarrow p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \Rightarrow$$

$$p = p_0 \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x\right)^{-\gamma} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma p_0 \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x\right)^{-\gamma-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Se $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma p_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

$$\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow f_x = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$p(x) S - p(x+dx) S = \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$-S \frac{\partial p}{\partial x} dx \approx \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma p_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Coefficiente di compressibilità: $\beta_0 = -V \frac{\partial p}{\partial V}$

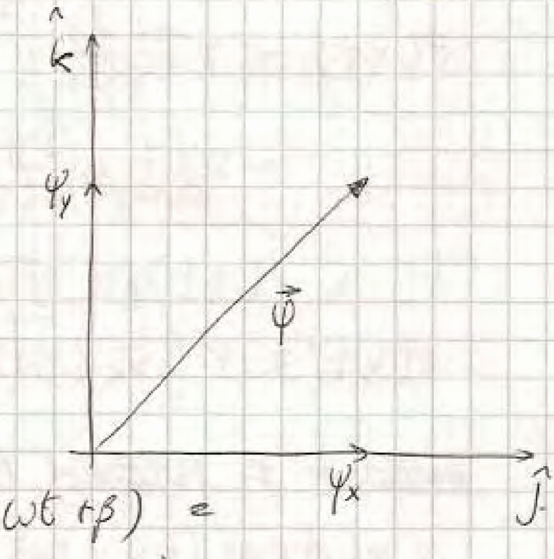
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\beta_0}{\rho_0}} \approx \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}}$$

INTENSITÀ DELL'ONDA

Potenza per unità di superficie.

Decibel: $\boxed{I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0}}$ con $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

POLARIZZAZIONE DELLE ONDE



$\vec{\psi}$ onda piana, armonica, trasversale, stessa ω.

$\psi_y = A_y \cos(kx - \omega t)$

$\psi_z = A_z \cos(kx - \omega t - \beta)$

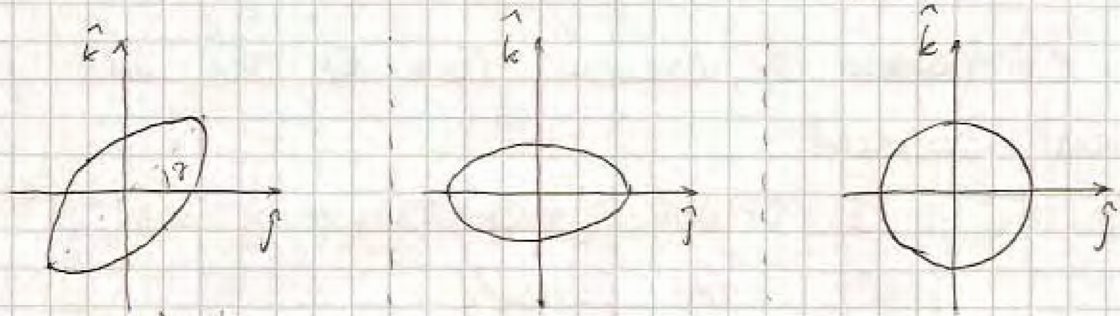
Nel piano $x=0$ $\Rightarrow$

$\psi_y = A_y \cos(-\omega t) = A_y \cos(\omega t)$

$\psi_z = A_z \cos(-\omega t - \beta) = A_z \cos(\omega t + \beta) =$

$= A_z \left(\cos(\omega t)\cos\beta - \sin(\omega t)\sin\beta\right) \Rightarrow$

$a\,\psi_z^2 + b\,\psi_y^2 + c\,\psi_z\psi_y + d = 0$ (eq. conica)



$\operatorname{tg} 2\gamma = 2\dfrac{A_z A_y}{A_z^2 - A_y^2}\cos\beta$ $\qquad$ $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\beta = \dfrac{\pi}{2},\ A_y = A_z$

POLARIZZAZIONE LINEARE

$\beta = 0 \Rightarrow \psi_z/\psi_y = A_z/A_y = \text{cost} \Rightarrow$
onda polarizzata linearmente

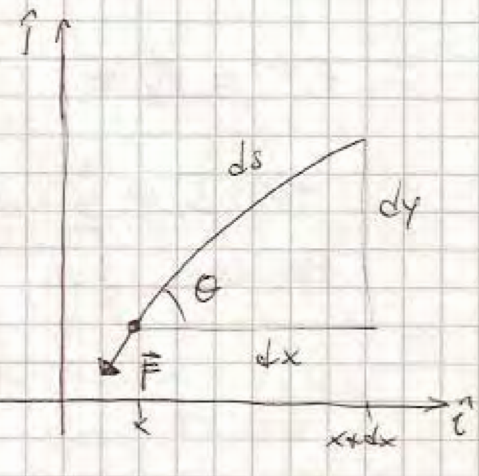
ENERGIA TRASPORTATA

$\delta L = \bar{F}\cdot d\bar{r} = F_y\,dy = F_y \dfrac{\partial y}{\partial t}\,dt =$

$= P(x,t)\,dt$

$F_y = -T\sin\theta \approx -T \operatorname{tg}\theta = -T\dfrac{\partial y}{\partial x}$

$\Rightarrow P(x,t) = -T\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial t}$



Onde progressive $\Rightarrow$ $y = f(x - vt)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x}$ $\Rightarrow$

$$P(x,t) = vT\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{T}{v}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = v\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= v\left(\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\delta L = P(x,t)dt = \frac{1}{2}\mu\, dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\, dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$P(x,t) = v\left(U_k(x,t) + U_p(x,t)\right)$ densità lineare di energia

ENERGIA E POTENZA PER ONDE MONOCROMATICHE

$$y = A\cos(kx - \omega t) \Rightarrow P(x,t) = v\mu\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Periodo $\tau \Rightarrow E(\tau) = \int_t^{t+\tau} v\mu\omega^2 A^2 \sin(kx - \omega t) =$

$$= \frac{1}{2}v\mu\omega^2 A^2 \tau = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Non c'è travaso di energia E_k e E_p ma solo fra elementi adiacenti.

Intensità: $I = \langle P(x,t)\rangle_\tau = \langle E(\tau)\rangle_\tau = \frac{1}{2}v\mu\omega^2 A^2$

$$I \propto \begin{cases} A^2 & \text{in generale} \\ \omega^2 & \text{solo onde armoniche} \end{cases}$$

IMPEDENZA DEI MEZZI

Inerzia di un sistema a cambiare qualche sua proprietà

$$Z = \frac{F^{(s)}}{\frac{\partial \xi}{\partial t}}$$

forza che sollecita

rapidità variazione.

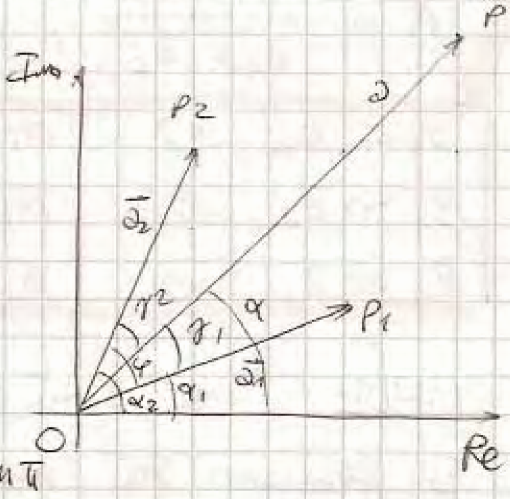
$$F^{(s)} = F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow Z = \frac{-T\,\partial y/\partial x}{-v\,\partial y/\partial x} = \frac{T}{v} = \mu v = \sqrt{T\mu}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}v\mu\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}Z\omega^2 A^2$$

Per un gas: $Z = Z_0 \cdot S = (\rho_0 v)S \Rightarrow$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}Z_0\omega^2 A^2}$$

SOVRAPPOSIZIONE DI ONDE



$f_1 = A_1 \cos(kx - \omega t)$

$f_2 = A_2 \cos(kx - \omega t + \varphi)$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi$

$f = f_1 + f_2 = \sqrt{A^2}\cos(kx - \omega t + \alpha_1)$

Massimo: $A = A_1 + A_2$ per $\varphi = 2n\pi$

Minimo: $A = |A_1 - A_2|$ per $\varphi = (2n+1)\pi$

$A_1 = A_2 \Rightarrow A = 2A_1\cos\frac{\varphi}{2} \Rightarrow f = 2A_1\cos\frac{\varphi}{2}\cos(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2})$

INTERFERENZA

$A_1 = A_2 \Rightarrow I \propto A^2 = 4A^2\cos^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \frac{I}{I_1} = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}$

L'energia si distribuisce nello spazio.

Interferenza costruttiva o distruttiva.

Se non c'è coerenza (φ non costante), l'intensità osservata è la media dell'espressione trovata:

$I = 4 < \cos^2\frac{\varphi}{2} > I_1 = 2I_1$

RIFLESSIONE E TRASMISSIONE

$Y_i + Y_r = Y_t$, $I = \frac{1}{2}Z\omega^2A^2$, Conservazione energia $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}Z_1\omega^2A_i^2 = \frac{1}{2}Z_1\omega^2A_r^2 + \frac{1}{2}Z_2\omega^2A_t^2 \Rightarrow$

$\begin{cases} Y_i + Y_r = Y_t \\ I_i = I_r + I_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_i + A_r = A_t \\ Z_1A_i^2 = Z_1A_r^2 + Z_2A_t^2 \end{cases}$

$R = \frac{A_r}{A_i} \Rightarrow \begin{cases} A_r = RA_i \\ A_t = (1+R)A_i \end{cases} \Rightarrow$

$Z_1A_i^2 = Z_1(R^2A_i^2) + Z_2((1+R)^2A_i^2) \Rightarrow$

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad A_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_i, \quad A_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} Z_1 \simeq Z_2 & \Rightarrow & A_r \simeq 0, & A_t \simeq A_i \\ Z_1 \gg Z_2 & \Rightarrow & A_t = 2A_i, & A_r = A_i \\ Z_1 \ll Z_2 & \Rightarrow & A_t \simeq 0, & A_r \simeq -A_i \end{array}}$$

ONDE STAZIONARIE

Si generano su una corda con un estremo bloccato.
Genera oscillazione collettiva senza propagazione.

$y = A\cos(kx - \omega t)$, $A_r = -A_i \Rightarrow$ onda risultante $=$
$= A\cos(kx - \omega t) - A\cos(kx + \omega t) = 2A\sin(kx)\sin(\omega t)$

Ampiezza: $B(x) = 2A\sin(kx)$ di un punto x.
Le oscillazioni avvengono in fase.

Ventri (massimi) per $kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2n+1}{4}\lambda$
Nodi (minimi) per $kx = 2n\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2n}{4}\lambda$

ONDA STAZIONARIA SU CORDA CON ESTREMI FISSI

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

Modi (di vibrazione) normali: fondamentale, primo armonico, secondo armonico, ecc.

Frequenze proprie: $\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1}$, $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$, ...

$$\nu_n = \frac{1}{\lambda_n} \cdot v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Non c'è trasporto di energia. Energia del modo:

$$E_n = \frac{1}{4}\mu L A_n^2 \omega_n^2$$

Come oscillatore armonico con $m = \mu L$ e $A_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

BATTIMENTI E VELOCITÀ DI GRUPPO

BATTIMENTI

Sovrapposizione di due onde armoniche con frequenze leggermente diverse che si propagano nello stesso mezzo, direzione e verso generano battimenti.

Supponiamo: $f_1 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$, $f_2 = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$

$\varphi_1 = k_1 x - \omega_1 t$, $\varphi_2 = k_2 x - \omega_2 t$.

$$f = f_1 + f_2 = \underbrace{2A\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}_{MODULO}\cos\underbrace{\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}_{FASE}$$

Studiamo per $x = 0$ $\Rightarrow$

$$f(0,t) = 2A\cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\cdot\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$$

è un'onda modulata di ampiezza variabile (AM)

Intervallo fra uno zero e il successivo:

$$\Delta t = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\nu_{bat}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu_{bat} = \nu_1 - \nu_2}$$

VELOCITÀ DI GRUPPO E DI FASE

Ampiezza onda modulata A' non è costante né in x né in t!
$$A' = 2A\cos\left(\frac{(k_2 - k_1)x}{2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right)$$

$$\begin{cases} k_g = \dfrac{k_2 - k_1}{2} = \dfrac{\Delta k}{2} \\ \omega_g = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \dfrac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \Rightarrow v_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Velocità di gruppo

Nel caso di "pacchetti" d'onda:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

L'onda ad alta frequenza è detta portante. Se le pulsazioni sono simili la portante modulata è quasi armonica. La portante avrebbe velocità di fase:

$$V_f = \frac{\omega_0}{k_0} \quad \text{con} \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$V_f = V_g \Rightarrow$ mezzo non dispersivo

Mezzo dispersivo $\Rightarrow \omega = k V_f \Rightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} = V_f + k \frac{dV_f}{dk}$
$\Rightarrow$ Cambia anche la forma del pacchetto e V_g è la velocità del massimo del gruppo.

ONDE ELETTROMAGNETICHE

EQUAZIONI DI MAXWELL

Si suppone lo spazio libero (senza cariche né correnti)

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\dfrac{\partial\bar{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \\ \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu\varepsilon\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Identità vettoriale: $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{E}) = \nabla(\bar{\nabla}\cdot\bar{E}) - \nabla^2\bar{E}$,

$$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{E}) = \bar{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\times\bar{B}) = -\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2},$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2\bar{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}$$

Analogamente:

$$\nabla^2\bar{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\bar{B}}{\partial t^2}$$

Con $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ torna l'equazione di D'Alembert.

ORTOGONALITÀ DEI CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$

Dimostriamo che $\bar{E}$ e $\bar{B}$ sono perpendicolari fra loro e che il rapporto dei loro moduli è uguale alla velocità della luce.

Per comodità siano onde piane, progressive, monocromatiche.

$$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} \qquad \bar{B} = \bar{B}_0 e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}-\omega t)} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t} = -i\omega\bar{E} \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = i\bar{k}\cdot\bar{E} \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = i\bar{k}\times\bar{E} \end{cases}$$ e analogo per $\bar{B}$.

$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$, $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \Rightarrow \bar{k}\cdot\bar{E} = \bar{k}\cdot\bar{B} = 0$, sono ortogonali

$$\begin{cases} \bar\nabla \times \bar E = i\bar k \times \bar E = -\dfrac{\partial \bar B}{\partial t} = + i\omega \bar B \\ \bar\nabla \times \bar B = i\bar k \times \bar B = \varepsilon\mu \dfrac{\partial \bar E}{\partial t} = \varepsilon\mu(-i\omega \bar E) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar k \times \bar E = \omega \bar B \\ \bar k \times \bar B = -\varepsilon\mu\omega \bar E \end{cases} \Rightarrow$$ $\bar k, \bar E, \bar B$ sono reciprocamente ortogonali.

$$\bar k \times \bar E = k\hat n \times \bar E = \omega \bar B \Rightarrow \hat n \times \bar E = \frac{\omega}{k}\bar B = v \cdot \bar B \Rightarrow$$

$$\hat n \times \bar E = v \cdot \bar B$$

Dunque $\hat n, \bar E, \bar B$ sono una terna levogira (come $\hat i, \hat j, \hat k$).

Se propagazione lungo $\hat i$:

$$\bar E = E_y \hat j + E_z \hat k = E_{y_0} \cos(kx - \omega t)\hat j + E_{z_0} \cos(kx - \omega t)\hat k$$

$$\bar B = B_z \hat j + B_y \hat k = B_{z_0} \cos(kx - \omega t)\hat j + B_{y_0} \cos(kx - \omega t)\hat k$$

Se $\bar E$ è lungo una direzione stabile (polarizzazione lineare), per esempio $\hat j$, allora $\bar B$ resta lungo $\hat k$.

INTENSITÀ DELLE ONDE EM.

Energia che attraversa la sezione $dS_\perp$ nel tempo dt:

$$dU_{EM} = w_{EM}\, dV = w_{EM}\, dS_\perp\, dx = w_{EM}\, dS_\perp\, v\, dt$$

Intensità istantanea dell'onda:

$$I = \frac{dU_{EM}}{dS_\perp\, dt} = w_{EM} \cdot v \Rightarrow \langle I \rangle = \langle w_{EM} \rangle \cdot v$$

$$B = \frac{E}{v} \Rightarrow w_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \varepsilon E^2$$

C'è una equipartizione dell'energia. Si ha:

$$I = \varepsilon E^2 v, \quad \langle I \rangle = \varepsilon \langle E^2 \rangle \cdot v$$

IMPEDENZA DEL MEZZO

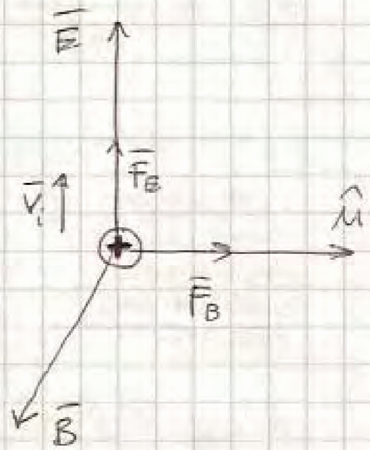
$$\begin{cases} I = \varepsilon v E^2 = \dfrac{E^2}{Z} \\ \langle I \rangle = \dfrac{\langle E^2 \rangle}{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{1}{\varepsilon v} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \\ Z_0 \cong 377\,\Omega \ \text{(nel vuoto)} \end{cases}$$

Onde armoniche: $E = E_0 \sin(kx - \omega t) \Rightarrow$

$$\langle I \rangle = \frac{E_0^2}{2Z}$$

PRESSIONE DI RADIAZIONE

Lasciata libera la carica, essa si mette in moto per effetto di $\bar{E}$ con velocità $\bar{v}_i$. Genera una corrente e dunque:



$$\bar{F}_B = q\,\bar{v}_i \times \bar{B}$$

Si può verificare che tale verso è indipendente dal segno della carica. Se l'onda investe la superficie di un corpo si ha una forza per unità di superficie, cioè una pressione (di radiazione) pari a:

$$p_r = \frac{\langle I \rangle}{c}$$

VETTORE DI POYNTING

Supponiamo che una zona di spazio sede di campo EM sia dielettrico omogeneo, isotropo, lineare: Allora:

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu \bar{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \rightarrow \bar{J} = \frac{1}{\mu} \bar{\nabla} \times \bar{B} - \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{J}\cdot\bar{E} = \frac{1}{\mu}\bar{E}\cdot\bar{\nabla}\times\bar{B} - \varepsilon\bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mu}\bar{E}\times\bar{B}\right) \equiv \bar{\nabla}\cdot\bar{P} = -\bar{E}\cdot\bar{J} - \frac{\partial w_{EM}}{\partial t}$$

dove $\bar{P} = \frac{1}{\mu}\bar{E}\times\bar{B}$ è il vettore di Poynting.
Integrando su un volume $V = \partial S$

$$-\frac{d}{dt}\int_V w_{EM}\, dV = \int_V \bar{E}\cdot\bar{J}\, dV + \int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{P}\, dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dU_{EM}}{dt} = W_{Joule} + \underbrace{\oint_S P\, d\bar{S}}_{POTENZA} \Rightarrow$$

$$\underbrace{dU_{EM}}_{\substack{\text{VARIAZIONE}\\ \text{ENERGIA NEL}\\ \text{VOLUME}}} = \underbrace{dU_{Joule}}_{\substack{\text{ENERGIA}\\ \text{DISSIPATA}}} + \underbrace{\Phi_S(\bar{P})\, dt}_{\substack{\text{FLUSSO DI ENERGIA}\\ \text{VERSO L'ESTERNO}}}$$

$$dU_{\Phi} = P\, dS\cos\theta\, dt = P\, dS_{\perp}\, dt \Rightarrow I = \frac{dU_{\Phi}}{dS_{\perp}dt} = P$$

Quindi il vettore di Poynting ha modulo uguale all'intensità della radiazione.
Attenzione! Il flusso di P attraverso una superficie dS implica se se (ma solo se) c'è flusso di energia, allora

$$dU_{\Phi} = \Phi_S(\bar{P})\, dt$$

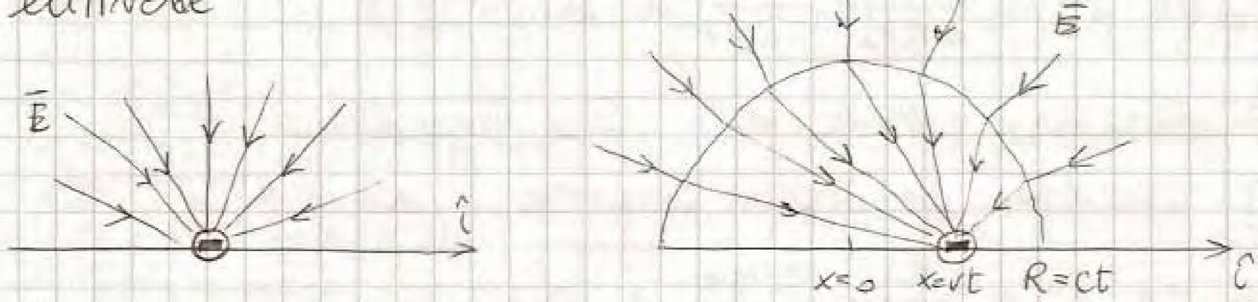
La condizione è dunque necessaria ma non sufficiente.
Ricordiamo:

$$\boxed{\langle I\rangle = \langle P\rangle = \frac{1}{2}\frac{E\cdot B}{\mu}}$$

PRODUZIONE DI ONDE E.M.

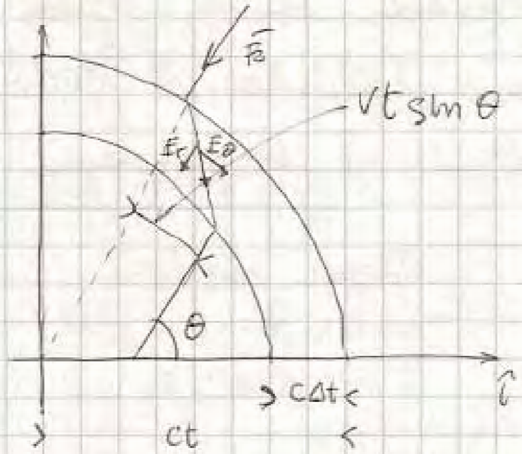
CARICHE ACCELERATE

Le onde E.M. nascono da accelerazioni di cariche elettriche



Supponiamo la durata dell'accelerazione della carica molto breve: $\Delta t \ll t$. Poi v costante. In realtà, $R = c\Delta t$. Per $r > R$ la perturbazione del campo elettrico non è ancora arrivata poiché essa viaggia a velocità c.

CAMPO DI RADIAZIONE



$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{vt\sin\theta}{c\Delta t} = \frac{at\sin\theta}{c} \Rightarrow$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{at\sin\theta}{c},$$

$$c\Delta t \ll r \Rightarrow r \approx ct \Rightarrow$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa\sin\theta}{c^2}\frac{1}{r}$$

E_θ è detto campo di radiazione e va come $\frac{1}{r}$. Esso contiene l'informazione. Prevale sul campo radiale (coulombiano) che va come $\frac{1}{r^2}$.

$$E_\theta \propto \begin{cases} a_\perp \\ 1/r \end{cases}$$

Il campo di radiazione prevale sulle lunghe distanze.

Tempo impiegato da E_θ per giungere a R: $t' = \frac{r}{c}$ $\Rightarrow$

$$E_\theta\left(t+\frac{r}{c}, r\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \sin\theta}{c^2 r} a(t) \Rightarrow$$

$$E_\theta(t, r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \sin\theta}{c^2 r} a\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

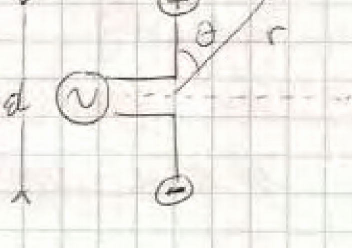
Accelerazione breve $\Rightarrow$ E_θ impulsivo

q oscilla di moto armonico: $a = \ddot{y} \propto \omega^2$ $\Rightarrow$

$$E_\theta(t, r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{c^2 r} a_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

DIPOLO ELETTRICO OSCILLANTE

2 cariche di segno opposto a distanza variabile (varia con legge sinusoidale):



$\bar{p} = q\bar{d} = q d_0 \sin(\omega t) = \bar{p}_0 \sin(\omega t)$

Se invece è la carica a variare (come spesso) e la distanza d è fissa (dipolo di Hertz):

$\bar{p} = q\bar{d} = \bar{d}_0\, q \sin(\omega t)$ lungo $\bar{r}$ si propaga onda E.M. trasversale.

$$\langle I \rangle \propto \omega^4 \frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

campo lontano

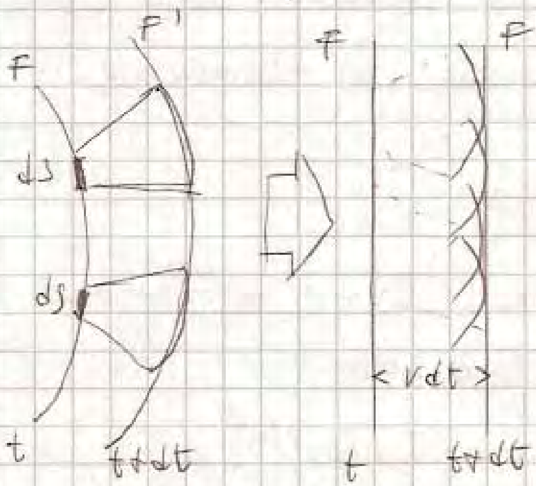
$\Downarrow$

$r \gg \lambda \gg d_0$

OTTICA ONDULATORIA

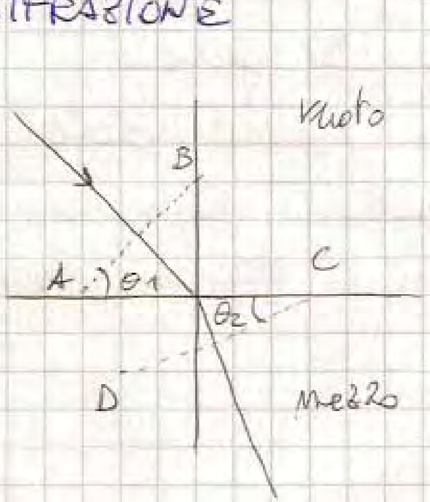
PRINCIPIO DI HUYGENS - FRESNEL

È possibile determinare la perturbazione E.M. in un punto onde senza conoscere la sorgente.
Dato un fronte d'onda all'istante t si costruisce quello a t+dt.



Ogni punto del fronte d'onda può essere considerato come nuova sorgente di onde sferiche che si propagano in tutte le direzioni con la stessa v e ω dell'onda iniziale. L'onda si propaga in un determinato verso; all'indietro si ha interferenza distruttiva.
Dall'ottica geometrica segue che l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione.

RIFRAZIONE



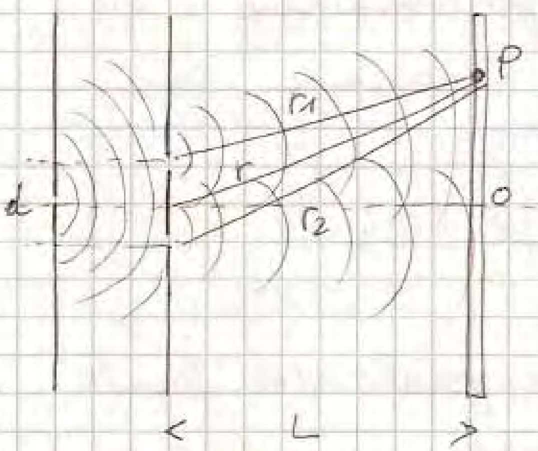
Indice di rifrazione:

$$n = \frac{c}{v^{mezzo}_{luce}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} > 1$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AC \sin\theta_2}{AC \sin\theta_1} = \boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}}$$

INTERFERENZA E.M.

ESPERIMENTO DI YOUNG



$$A_1 = A_2 \Rightarrow \langle I \rangle = 4\langle I_1 \rangle \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

In questo modo abbiamo due sorgenti coerenti.
Lo spostamento delle onde in P è dovuto solo alla differenza di cammino.

$$\delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$\max: \quad r_2 - r_1 = m\lambda, \qquad \min: \quad r_2 - r_1 = \frac{2m+1}{2}\lambda$$

$$r \gg d \Rightarrow \quad \Delta r \approx d \sin\theta \approx d \,tg\,\theta \Rightarrow$$

$$\max: \ d\,tg\,\theta = m\lambda \Rightarrow \langle I \rangle \approx 4\langle I_1 \rangle \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d\,tg\,\theta\right) =$$

$$= 4\langle I_1 \rangle \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \frac{x}{L}\right)$$

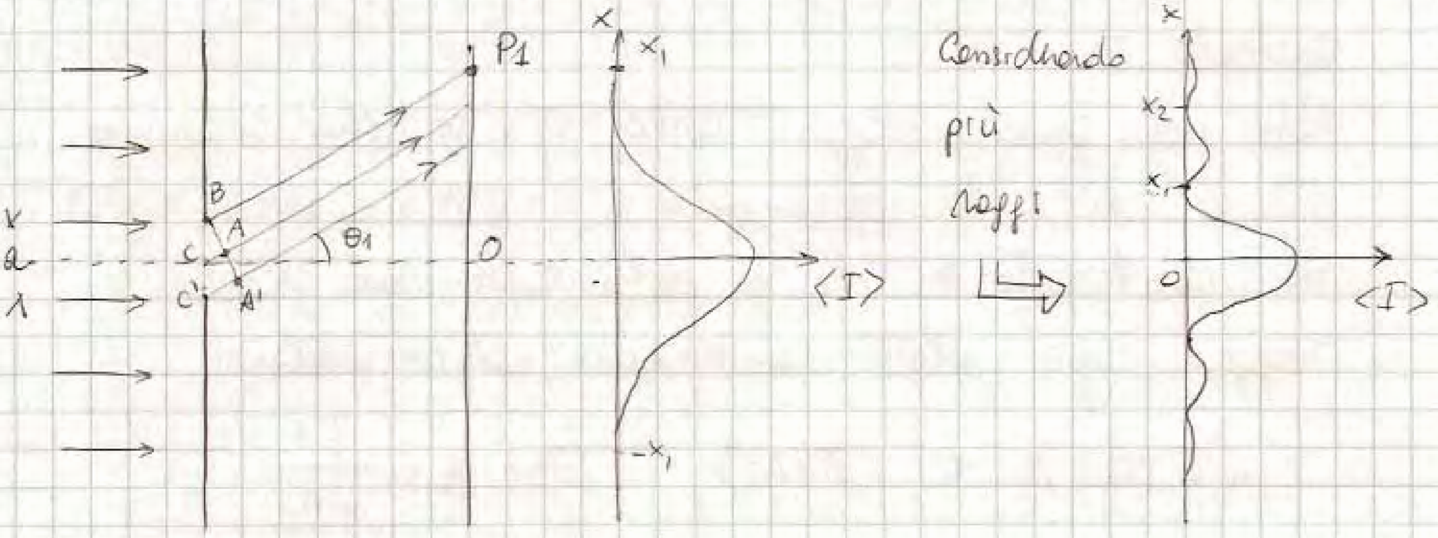
$$\Rightarrow \max: \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \frac{x}{L}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{x = m\frac{L}{d}\lambda}$$

$$\min: \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \frac{x}{L}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2m+1}{2}\frac{L}{d}\lambda}$$

FENOMENI DI DIFFRAZIONE

Se un fronte d'onda che si muove liberamente incontra un ostacolo si deforma. Si generano fenomeni di diffrazione non previsti dall'ottica geometrica. Tali fenomeni sono comunque in accordo con il principio di Huygens-Fresnel

DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER



La diffrazione è accentuata quanto più $a \simeq \lambda$ e sorgente e schermo sono molto lontani ($\to \infty$). Si chiama diffrazione di Fraunhofer. Se le condizioni non sono rispettate si ha la diffrazione di Fresnel.

Supponiamo: schermo spesso, fenditura a infinitamente lunga sull'altro lato, onde piane, uniformi, monocromatiche, polarizzate linearmente ed un campo $\vec{E}$ parallelo alla fenditura.

Per un punto $P \equiv O$, le onde secondarie sono in fase e $\langle I(0) \rangle$ è massimo.

Per $\theta_1 \neq 0$ ($\Rightarrow P_1$) si ha sfasamento

$$CA = \frac{a}{2} \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow C'A' = \lambda \Rightarrow$$

I contributi dei raggi da B a C si annullano con quelli dei raggi da C a C' perché sfasati due a due di $\frac{\lambda}{2}$. $\Rightarrow \langle I(P_1) \rangle = 0$.

per $\sin\theta_1 = n \frac{\lambda}{a}$

Si ha maggiore diffrazione se a diminuisce ($\Rightarrow \theta$ aumenta). Per $a = \lambda$ solo massimo centrale.

Con un quarto raggio sotto C' e A' che chiamiamo C'' e A'', lo sfasamento è: $C''A'' = a \sin\theta_2 = \frac{3}{2}\lambda$

Il contributo in P_2 è dato solo dal quarto raggio, gli altri continuano ad annullarsi.

$$\langle I(P_2)\rangle < \langle I(0)\rangle, \quad \sin\theta_2 = \frac{3\lambda}{2a}$$

DIFFRAZIONE PER ONDE ARMONICHE

$$y = A\cos(kr - \omega t), \quad \langle I\rangle = \langle I_0\rangle \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

$$\alpha = k\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta, \quad \langle I_0\rangle = \frac{\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 A^2 a^2}{2rZ} \propto a^2$$

Minimi: $\sin\theta = n\frac{\lambda}{a}$, massimi vicini ai massimi di $\sin^2\alpha$, dunque: $\sin\theta = \frac{2n+1}{2}\frac{\lambda}{a}$

(n sempre intero e $\neq 0$)

Larghezza curva a metà massimo $\left(\frac{I_0}{2}\right)$:

$\Delta\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{a}$. Si può dimostrare che gran parte della radiazione diffratta è nel massimo centrale: $I \approx 0{,}04\, I_0$.

DIFFRAZIONE DOVUTA AD APERTURA CIRCOLARE

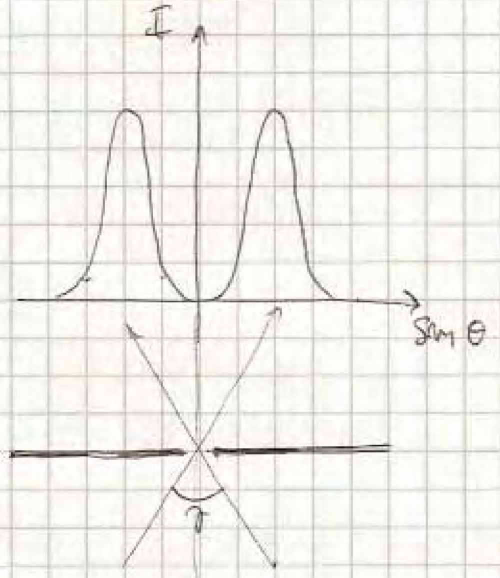
Diametro del foro $D \Rightarrow$

$$\begin{cases} \langle I\rangle = \langle I_0\rangle\, 4\, \dfrac{J_1^2(\alpha)}{\alpha^2} \\ \alpha = k\dfrac{D}{2}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \text{zero per } 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} \\ \text{massimo per } 2{,}23\,\frac{\lambda}{D} \end{matrix}$$

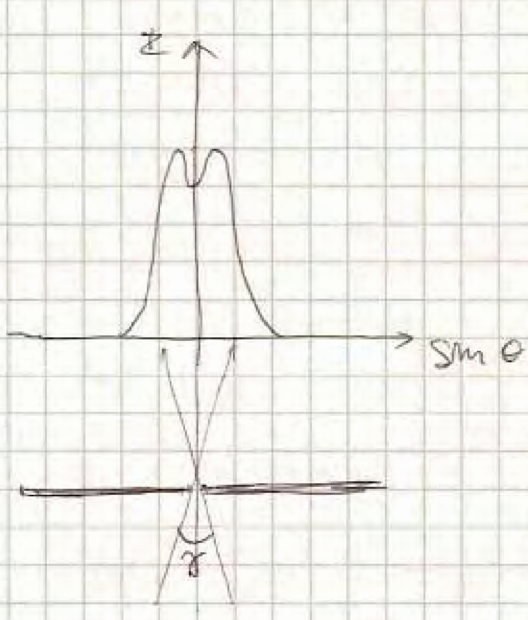
POTERE RISOLUTIVO (O SEPARATORE)

Supponiamo sorgenti puntiformi e incoerenti:

VENGONO VISTI COME OGGETTI SEPARATI



VENGONO VISTI COME UN UNICO OGGETTO PUNTIFORME



Nel secondo caso non si distingue il massimo di uno dallo zero del secondo: $\gamma_R = 1{,}22 \frac{\lambda}{D}$ (è un limite teorico).

Potere separatore (o risoluzione): $\frac{1}{\gamma_R} = \frac{D}{1{,}22\,\lambda}$